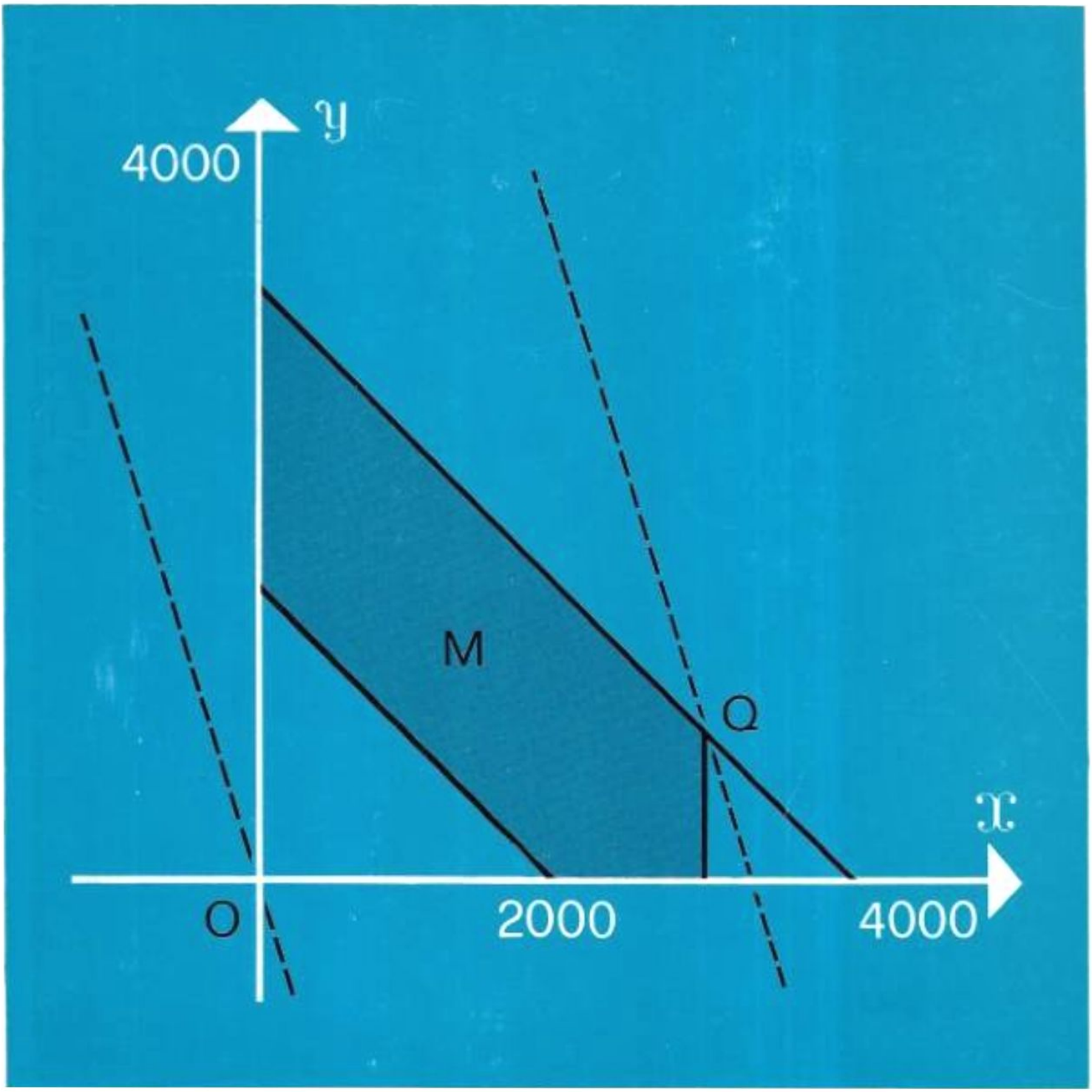


Giovanni Prodi

Matematica come scoperta

per il biennio delle scuole medie superiori

Casa editrice G. D'Anna
Messina-Firenze

2

Giovanni Prodi

Matematica come scoperta

per il biennio delle scuole medie superiori

2

Casa editrice G. D'Anna
Messina-Firenze

Indice

Prefazione 5

16
Traslazioni, vettori

16.1 Rappresentazione di simmetrie. Il punto di mezzo di un segmento 7
Esercizi 10
16.2 Le traslazioni 11
Esercizi 15
16.3 La rappresentazione cartesiana delle traslazioni 16
Esercizi 20
16.4 I vettori 21
Esercizi 27
16.5 Traslazioni e simmetrie 28
Vocaboli e simboli 32
Esercizi 32

17
Rette e sistemi lineari

17.1 Equazione di una retta passante per l'origine 34
Esercizi 38
17.2 Equazione di una retta qualsiasi 39
Esercizi 43
17.3 I sistemi lineari 43
Esercizi 51
17.4 Analisi di un sistema lineare e formule risolutive 53
Esercizi 59

17.5 Disequazioni nel piano cartesiano 59
Esercizi 70
17.6 Nel mondo lineare 70
Vocaboli e simboli 78
Esercizi 78

18
Il secondo grado

18.1 La parabola 80
Esercizi 87
18.2 Le equazioni di secondo grado 88
Esercizi 96
18.3 Relazioni fra le radici e i coefficienti 97
Fattorizzazione di un trinomio di secondo grado 100
Segno di un trinomio di secondo grado 101
La « regola dei segni » di Cartesio 103
Esercizi 106
18.4 Cerchi e rette. La formula di Erone 107
Esercizi 114
18.5 L'equazione del cerchio in forma normale 115
Esercizi 118
18.6 L'iperbole equilatera e le lenti 119
Esercizi 123
18.7 Con riga e compasso 123
Le « regole del gioco » in geometria 124
Dalle operazioni geometriche alle operazioni algebriche 127
Dalle operazioni algebriche alle operazioni geometriche 129
Osservazioni conclusive 133
Vocaboli, simboli, formule 134
Esercizi 135

19
Aritmetica ed algebra

19.1 Divisibilità dei numeri primi 137
Esercizi 140
19.2 L'insieme dei numeri primi è infinito 140
Esercizi 142

19.3 Il massimo comun divisore. L'algoritmo di Euclide 143
Esercizi 149
19.4 Corpi e anelli 149
Esercizi 158
19.5 Il minimo comune multiplo 158
19.6 Le classi di resti 164
Vocaboli e simboli 174
Esercizi 174

20
Rotazioni, angoli

20.1 Alcune proprietà delle isometrie 177
Esercizi 180
20.2 Le rotazioni 181
Esercizi 187
20.3 Gli angoli: ordinamento e misura 188
Esercizi 198
20.4 Proprietà angolari dei poligoni 198
Esercizi 204
20.5 Proprietà angolari del cerchio 205
Esercizi 209
20.6 I classici criteri di congruenza nei triangoli 209
Vocaboli e simboli 213
Esercizi 214

21
Le similitudini

21.1 Similitudini e omotetie 215
Esercizi 221
21.2 Triangoli simili e fattorizzazione delle similitudini 221
Esercizi 227
21.3 Le unità di misura e le similitudini 227
21.4 I gruppi di trasformazioni 233
Esercizi 237
21.5 La nozione di gruppo 237
Vocaboli e simboli 243
Esercizi 243

22
L'arte del triangolo

22.1 Definizione del coseno e del seno 245
Esercizi 251
22.2 Proprietà immediate delle funzioni coseno e seno 252
Esercizi 259
22.3 La retta in forma parametrica. La funzione tangente 260
Esercizi 264
22.4 Il teorema del coseno e quello dei seni 264
Esercizi 271
22.5 La geometria e l'astronomia 272
Eratostene e il raggio della Terra 273
La distanza della Luna 275
Il Sole e i pianeti 276
Esercizi 278
22.6 Le funzioni periodiche. Il prolungamento delle funzioni circolari 279
Vocaboli e simboli 283
Esercizi 284
Tavole del seno e del coseno 285

23
I polinomi

23.1 I polinomi: riesame della definizione 286
Esercizi 293
23.2 I polinomi in una variabile 293
Esercizi 297
23.3 La divisione con resto fra polinomi 298
Esercizi 305
23.4 Il massimo comun divisore di due polinomi 305
Esercizi 308
23.5 Le funzioni polinomiali 309
Esercizi 313
23.6 Alcuni importanti sviluppi algebrici 314
Vocaboli e simboli 317
Esercizi 317

24
I numeri complessi

24.1 I numeri complessi (con disinvoltura) 319

Esercizi 325
24.2 I numeri complessi (con i puntini sulle i...) 325
Esercizi 331
24.3 La rappresentazione dei numeri complessi nel piano 331
Esercizi 338
24.4 La « formula di addizione » 339
Esercizi 348
24.5 Il moto rotatorio uniforme 349
Vocaboli e simboli 353
Esercizi 354

25
Alcuni problemi interessanti

25.1 Problemi di massimo e minimo in geometria 357
Esercizi 365
25.2 Si comincia col costruire una scuola 366
Esercizi 372
25.3 Per concludere: ancora un tuffo nella probabilità 373
Esercizi 381

Prefazione

Questo secondo volume presenta alcuni classici temi, che sono componente indispensabile di ogni formazione matematica. L'esposizione, che procede secondo le vie tracciate nel primo volume, è di carattere fortemente unitario, senza separazione di materie o di metodi.

Malgrado l'evidente ossatura teorica, l'insegnamento è sempre condotto « per problemi »; gli esercizi annessi a ciascun paragrafo aiutano ad introdurre la teoria, a capirla nei suoi vari aspetti e, infine, ad applicarla. Le nozioni piú astratte e generali (come quelle di gruppo, corpo, anello) non sono premesse, ma sono ricavate da esempi concreti con un lavoro graduale di sintesi e di generalizzazione.

La materia esposta supera certamente per quantità i limiti di un biennio: e ciò sia per l'opportunità di offrire una scelta all'Insegnante, sia perché non vi sono confini « naturali » che delimitino in modo preciso il biennio. Quest'ultima considerazione, del resto, ha carattere generale: forse, il porre troppo l'accento sul biennio anziché su tutto l'arco della scuola secondaria superiore finisce per accreditare l'idea di un biennio-parcheggio, mentre lo scopo di questo ciclo scolastico dovrebbe essere, anche per quello che riguarda la matematica, tutt'altro: dirigere l'attività dei giovani verso mete impegnative e stimolanti.

In questo volume compaiono, in alcuni punti, dimostrazioni un po' tecniche: su giudizio dell'Insegnante, esse possono venire omesse, almeno in una prima lettura: il sottofondo intuitivo è cosí evidente che è possibile percorrere queste scorciatoie senza che sia impedita la comprensione di ciò che segue. Si è parlato di « prima lettura » perché un testo di matematica per le scuole secondarie superiori dovrebbe essere riletto alla fine di tutto il ciclo

secondario, per raggiungere una visione unificata e approfondita della materia già appresa: ciò almeno nella misura in cui si desidera che la matematica diventi elemento di cultura e di formazione intellettuale.

L'interesse destato dal primo volume attesta che l'esigenza di un rinnovamento dell'insegnamento della matematica è sempre piú ampiamente avvertita. L'Unione Matematica Italiana, con la collaborazione del Consiglio Nazionale delle Ricerche, ha promosso la costituzione di « nuclei di ricerca didattica » che operano in varie direzioni, con lo scopo di condurre sperimentazioni didattiche e di produrre materiale utile per il lavoro in classe. L'autore è lieto di dare atto delle sollecitazioni, dei suggerimenti e delle critiche che gli sono venuti dai nuclei di Pisa, Pavia, Trieste; è particolarmente grato al Prof. V. Checcucci, da cui ha ricevuto molte idee ed indicazioni. L'autore ringrazia vivamente la Prof.ssa M. A. Bettini Mariotti, la Prof.ssa G. Pistelli, il Prof. M. Ferrari per il validissimo aiuto.

Infine, l'autore rinnova alla Casa editrice il suo vivo apprezzamento per la sensibilità dimostrata nel curare la stampa dell'opera.

16

Traslazioni, vettori

16.1 Con la rappresentazione dei punti del piano mediante le coordinate cartesiane ci siamo procurati uno strumento formidabile, che ora utilizzeremo ampiamente. Cominciamo con alcuni problemi molto semplici.

Rappresentazione di simmetrie. Il punto di mezzo di un segmento

a) Anzitutto: *dati gli assi cartesiani* $\mathfrak{x}$ *ed* $\mathfrak{y}$ *e dato un punto* $P \leftrightarrow (x, y)$ *quali sono le coordinate* (x', y') *del punto* P' *simmetrico di* P *rispetto all'asse* $\mathfrak{y}$?

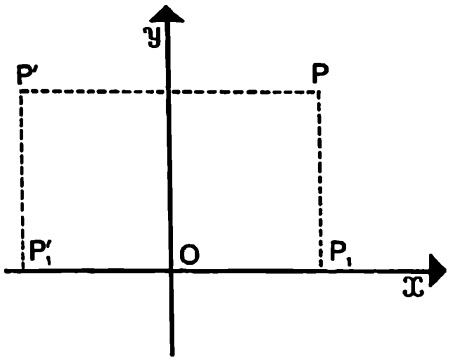


Fig. 1

In primo luogo, è evidente che deve essere $y' = y$ perché P e P' si trovano sulla stessa perpendicolare all'asse $\mathfrak{y}$. Per trovare l'ascissa di P', proiettiamo P e P' sull'asse $\mathfrak{x}$, ottenendo i punti P_1, P'_1, rispettivamente. È evidente che deve essere $|x'| = |x|$, perché i punti P_1 e P'_1 hanno la stessa distanza dall'origine O. Ma essi si trovano in semirette opposte rispetto ad O e perciò le loro coordinate hanno segno opposto. Dunque è $x' = -x$.

Possiamo concludere che la simmetria di asse $\mathfrak{y}$ è rappresentata dalla seguente applicazione di $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ (ricordiamo che $\mathbf{R}^2$ è l'insieme di tutte le coppie di numeri reali):

$$(x, y) \longrightarrow (-x, y)$$

b) *Cerchiamo di estendere il nostro procedimento: anziché l'asse* $\mathfrak{y}$, *consideriamo una retta parallela all'asse* $\mathfrak{y}$ *di ascissa a;* questa retta si potrà rappre-

sentare con l'equazione $x = a$, dal momento che essa contiene tutti i punti (x, y) del piano per cui è $x = a$, e nessun altro punto. Come si può rappresentare una simmetria rispetto a questa retta?

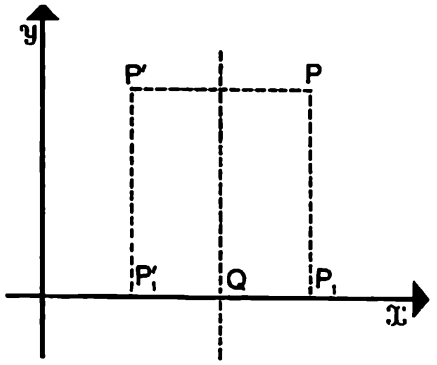


Fig. 2

Indichiamo ancora con P_1, P'_1 le proiezioni dei punti P e P', rispettivamente, sull'asse $\mathfrak{x}$. Indichiamo con Q il punto di coordinate $(a, 0)$, cioè il punto in cui l'asse di simmetria taglia l'asse $\mathfrak{x}$.

Poniamo sempre $P \leftrightarrow (x, y)$, $P' \leftrightarrow (x', y')$. Anche ora si ha evidentemente $y' = y$.

Per trovare la relazione che sussiste fra le ascisse x ed x', si tratta di tenere conto che $\overline{P_1Q} = \overline{P'_1Q}$ e che P_1 e P'_1 si trovano in semirette opposte rispetto a Q. (Insomma, il punto Q ha ora lo stesso ruolo che prima aveva l'origine O).

Sappiamo (rivedere il § 15.3) che si ha $\overline{P_1Q} = |x - a|$, $\overline{P'_1Q} = |x' - a|$; dunque i numeri $x - a$, $x' - a$ hanno lo stesso valore assoluto: essi allora o coincidono, o sono opposti fra loro. Ma è chiaro che non possono coincidere, a meno che non sia $x = x' = a$, dunque sono opposti fra loro, cioè vale la relazione $x - a = -(x' - a)$, da cui si ricava

$$x + x' = 2a \qquad (1)$$

Da questa relazione si ricava $x' = 2a - x$; perciò la nostra simmetria è rappresentata dalla seguente applicazione di R^2 in R^2:

$$(x, y) \longrightarrow (2a - x, y) \qquad (2)$$

c) Dopo aver rappresentato la simmetria rispetto ad un asse parallelo all'asse $\mathfrak{y}$, *è del tutto banale rappresentare la simmetria rispetto ad un asse parallelo all'asse* $\mathfrak{x}$, *di ordinata* b. Si tratta di fare un semplice scambio di lettere; riflettendo alla (2), troviamo che la rappresentazione della nuova simmetria assiale è la seguente:

$$(x, y) \longrightarrow (x, 2b - y) \qquad (3)$$

d) Ed ora è facile rappresentare *la simmetria centrale con centro nel punto* $M \leftrightarrow (a, b)$. Sappiamo (dal § 14.4) che una simmetria centrale è il prodotto di due simmetrie assiali, con assi ortogonali che si incontrano nel centro. Evidentemente, possiamo prendere come assi le parallele all'asse $\mathfrak{y}$ e all'asse $\mathfrak{x}$ passanti per M. Dunque, per rappresentare la simmetria con centro M non c'è che da fare la composizione della (2) e della (3) (non importa in quale ordine):

$$(x, y) \longrightarrow (2a - x, y) \longrightarrow (2a - x, 2b - y)$$

Indicando con $P' \leftrightarrow (x', y')$ il corrispondente di $P \leftrightarrow (x, y)$, la simmetria di centro $M \leftrightarrow (a, b)$ si può perciò rappresentare così:

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases} \tag{4}$$

Da queste equazioni possiamo dedurre un risultato molto interessante. Sommando membro a membro x nella prima ed y nella seconda, e dividendo per 2, otteniamo

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x + x') = a \\ \frac{1}{2}(y + y') = b \end{cases} \tag{5}$$

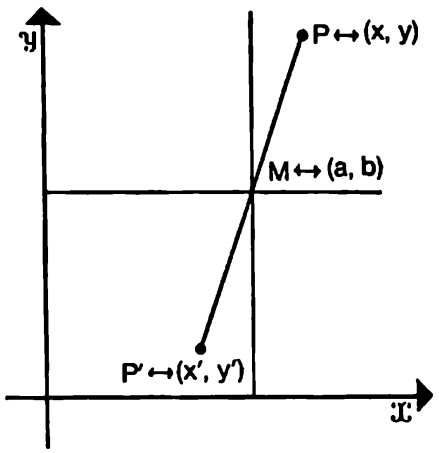


Fig. 3

La prima relazione ci dice che l'ascissa del centro di simmetria M è la media aritmetica delle ascisse dei due punti corrispondenti P, P'; la seconda relazione ci dice la stessa cosa per le ordinate. Ma il punto di mezzo di un segmento $[P, P']$ si può sempre pensare come centro di una simmetria che scambia fra loro gli estremi P, P'. Dunque: *le coordinate del punto di mezzo del segmento* $[P, P']$ *sono le medie aritmetiche delle rispettive coordinate di* P *e* P'.

Questo semplice risultato può servire per decidere se un quadrilatero, *eventualmente anche degenere*, è un parallelogrammo. *Il quadrilatero* $ABCD$ (l'ordine con cui sono elencati i vertici è essenziale!) *è un parallelogrammo se e solo se il punto di mezzo della diagonale* $[A, C]$ *coincide con il punto di mezzo della diagonale* $[B, D]$: infatti, se un punto Q è simultaneamente punto di mezzo di queste due diagonali, ciò significa che la simmetria con centro Q scambia fra loro A e C , B e D.

Tutto questo ci era già noto, in sostanza; vediamo ora come la condizione può essere espressa facendo intervenire le coordinate dei vertici. Supponiamo che sia:

$$A \leftrightarrow (x_1, y_1) \quad , \quad B \leftrightarrow (x_2, y_2)$$
$$C \leftrightarrow (x_3, y_3) \quad , \quad D \leftrightarrow (x_4, y_4)$$

Allora $ABCD$ è un parallelogrammo se e solo se:

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_3) = \frac{1}{2}(x_2 + x_4)$$
$$\frac{1}{2}(y_1 + y_3) = \frac{1}{2}(y_2 + y_4)$$

Queste relazioni, che ci saranno molto utili fra poco, si possono esprimere così:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \\ y_1 + y_3 = y_2 + y_4 \end{cases} \qquad (6)$$

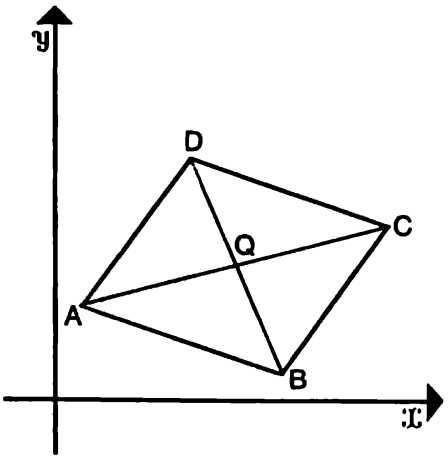


Fig. 4

Esercizi

1 Trovare le coordinate del punto simmetrico di $P \leftrightarrow (5, 2)$ rispetto all'asse x, rispetto all'asse y, rispetto all'origine.

2 Dato nel piano un riferimento cartesiano, rappresentare la simmetria assiale che scambia fra loro le rette $x = 3$, $x = 6$. (Ormai il significato di quel «rap-

presentare» dovrebbe essere chiaro: si tratta di esprimere la simmetria per mezzo delle coordinate).

3 Rappresentare la simmetria assiale che ha come asse la retta $y = -1$.

4 Rappresentare la simmetria centrale con centro nel punto $Q \leftrightarrow (2, -1)$.

5 Rappresentare la trasformazione che si ottiene componendo le simmetrie degli es. 3 e 4, in questo ordine. (Occorre rivedere quanto studiato a proposito della composizione delle applicazioni nel § 12.3).

* **6** Rappresentare la trasformazione che si ottiene componendo la simmetria avente come asse la retta $x = 1$ con la simmetria avente come asse la retta $x = 5$ (nell'ordine scritto!). Che succede se si inverte l'ordine?

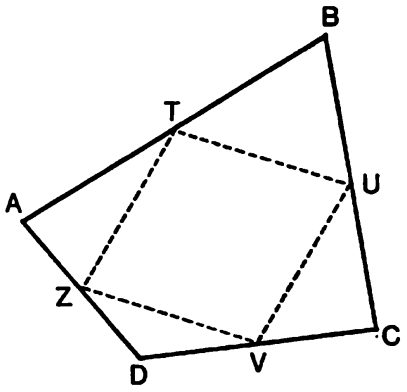
* **7** Rappresentare la simmetria assiale che scambia fra loro la semiretta positiva dell'asse $\mathfrak{X}$ e la semiretta positiva dell'asse $\mathfrak{Y}$.

8 Verificare con il calcolo che l'applicazione definita dalla (2) è involutoria, che ha come punti fissi i punti della retta $x = a$ e che rappresenta un'isometria.

9 Dati i punti $A \leftrightarrow (1, 2)$, $B \leftrightarrow (3, 1)$, $C \leftrightarrow (0, 4)$, determinare le coordinate del quarto punto D, in modo che $ABCD$ sia un parallelogrammo. Fare anche un disegno accurato.

* **10** Presi tre punti A, B, C non allineati, trovare tutti i possibili parallelogrammi di cui A, B, C sono vertici. Dimostrare che i nuovi vertici sono vertici di un triangolo di cui A, B, C sono i punti medi dei lati.

11 Dato un quadrilatero *qualunque* $A\ B\ C\ D$ il quadrilatero che ha per vertici, ordinatamente, i punti di mezzo dei lati è un parallelogrammo.
(Si faccia la dimostrazione col metodo analitico ponendo $A \leftrightarrow (x_1, y_1)$, $B \leftrightarrow (x_2, y_2)$, $C \leftrightarrow (x_3, y_3)$, $D \leftrightarrow (x_4, y_4)$: calcolare le coordinate dei punti $T, U, V, Z, \ldots$).



16.2 Ricordiamo il modello intuitivo che abbiamo impiegato, all'inizio del cap. 14, per in- **Le traslazioni**

trodurre le isometrie: il movimento di un foglio di carta, rispetto ad un altro foglio che rimane fermo. Fra i vari movimenti possibili ve n'è uno che è, in un certo senso, il piú semplice: quello in cui il foglio è spostato in una direzione assegnata, senza essere girato. Nella figura qui accanto, le frecce indicano lo spostamento dei vari punti: $P \longrightarrow P'$, $Q \longrightarrow Q'$, ...

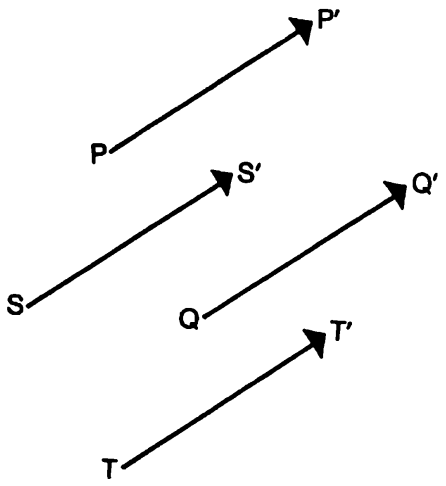


Fig. 5

Vogliamo dare una definizione precisa:

Si dice **traslazione** *un'applicazione bigettiva del piano in sé tale che*

1) *I punti si spostano tutti in una stessa direzione.*

2) *Ogni retta del piano viene trasformata in una retta ad essa parallela.*

Fra le traslazioni vogliamo anche includere quella, banale, che lascia fermi tutti i punti, cioè l'identità.

Nella definizione non si dice che una traslazione è un'isometria: questa proprietà verrà dimostrata piú avanti, come conseguenza delle proprietà 1) e 2) della definizione.

Supponiamo ora di sapere che una traslazione t diversa dall'identità manda il punto P nel punto P' : $t(P) = P'$. Siamo in grado di determinare il corrispondente di un altro punto Q qualsiasi?

Supponiamo dapprima che il punto Q non appartenga alla retta PP' ; domandiamoci dove deve trovarsi il punto $Q' = t(Q)$. In base alla proprietà 2), la retta PQ viene trasformata in una retta ad essa parallela, che dovrà contenere i punti P' e Q': dunque Q' deve trovarsi sulla parallela alla retta PQ mandata per il punto P'.

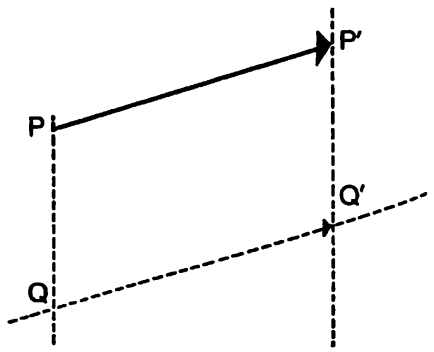


Fig. 6

D'altra parte, per la proprietà 1) i punti devono

spostarsi tutti in una medesima direzione: cioè la retta QQ' deve essere parallela alla retta PP' (ricordiamo il significato di *direzione* che è stato introdotto nel § 15.2).

In conclusione: il punto Q' è il punto d'incontro delle due rette seguenti:

parallela alla retta PQ mandata per il punto P';
parallela alla retta PP' mandata per il punto Q.

Queste due rette si incontrano effettivamente, perché essendo il punto Q per ipotesi fuori della retta PP' le due rette PP', PQ sono incidenti, e sono quindi incidenti anche le due rette ad esse parallele che ci interessano. (Rivedere il teorema II del § 15.2).

Possiamo anche compendiare la nostra costruzione così: *il punto Q' richiesto è l'unico punto Q' tale che il quadrilatero $P'PQQ'$ sia un parallelogrammo.* (Attenzione: è essenziale l'ordine con cui si indicano i punti $P'PQQ'$!).

Vediamo ora come si può procedere nel caso in cui il punto Q si trovi sulla retta PP'. Evidentemente, la costruzione fatta prima non si può applicare; possiamo però arrivare egualmente allo scopo con un passo intermedio: prendiamo un punto qualsiasi T fuori della retta PP' e costruiamo il suo corrispondente T' mediante il parallelogrammo $P'PTT'$; quindi, tenendo presente che il punto Q si trova fuori della retta TT', siamo in grado di costruire il corrispondente Q' di Q mediante il parallelogrammo $T'TQQ'$. In sostanza, siamo arrivati allo scopo eseguendo due volte la costruzione indicata prima. (Questo procedimento verrà detto «**del doppio parallelogrammo**»).

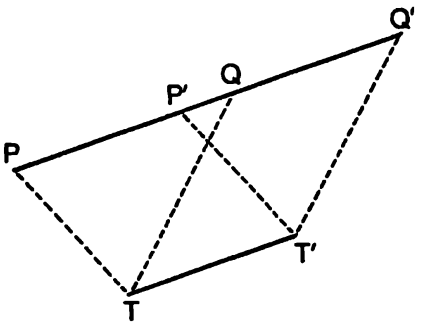


Fig. 7

Ricordiamo che c'è uno strumento di disegno molto diffuso, basato sul doppio parallelogrammo, con cui è possibile costruire per un punto qualsiasi la parallela ad una retta fissata: il *tecnigrafo*.

Riesaminiamo la costruzione eseguita in questo secondo caso, un po' eccezionale, in cui il punto Q è preso sulla retta PP' ; viene spontaneo chiedersi: non accadrà che anche in questo caso il quadrilatero $PQQ'P'$ sia un parallelogrammo? (Teniamo presente che la nostra definizione di quadrilatero non esclude i quadrilateri degeneri). La risposta è affermativa ed è ottenuta attraverso il seguente teorema:

I - *Se $TQQ'T'$ e $TPP'T'$ sono entrambi parallelogrammi, anche $PQQ'P'$ è un parallelogrammo.*

La figura chiarisce bene l'enunciato: *i due parallelogrammi assegnati hanno un lato in comune; allora i due lati opposti a questo danno origine ad un terzo parallelogrammo.*

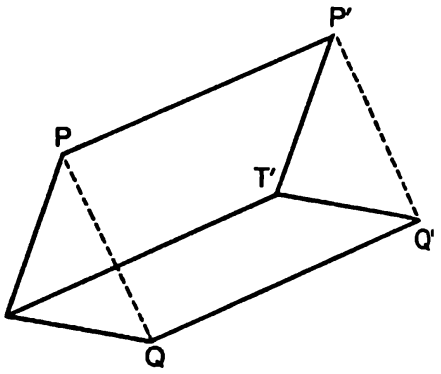


Fig. 8

La dimostrazione si ottiene facilmente mediante le relazioni (6).

Introdotto un riferimento cartesiano, si abbia:

$$P \leftrightarrow (x_1 , y_1) \qquad P' \leftrightarrow (x'_1 , y'_1)$$

$$T \leftrightarrow (x_2 , y_2) \qquad T' \leftrightarrow (x'_2 , y'_2)$$

$$Q \leftrightarrow (x_3 , y_3) \qquad Q' \leftrightarrow (x'_3 , y'_3)$$

Mettiamo in relazione dapprima le ascisse dei vari punti, tramite la prima delle (6).

Dall'ipotesi che $TPP'T'$ sia un parallelogrammo si ricava: $x_1 + x'_2 = x'_1 + x_2$.

Dall'ipotesi che $TQQ'T'$ sia un parallelogrammo si ricava: $x_2 + x'_3 = x'_2 + x_3$.

Sommando membro a membro queste uguaglianze e semplificando si ottiene

$$x_1 + x'_3 = x'_1 + x_3$$

Analogamente si procede per le ordinate e si ottiene

$\gamma_1 + \gamma'_3 = \gamma'_1 + \gamma_3$

Queste due ultime relazioni esprimono il fatto che $PQQ'P'$ è un parallelogrammo ■ *

Possiamo dunque concludere questo primo studio sulle traslazioni con la seguente affermazione, *valida anche nel caso in cui la traslazione sia l'identità:*

II - *Se una traslazione t manda P in P', essa manda un punto Q nell'unico punto Q' tale che PQQ'P' sia un parallelogrammo.*

Ed ora possiamo rispondere ad un quesito che avevamo lasciato in sospeso all'inizio del paragrafo:

III - *Una traslazione è un'isometria.*

Infatti, siano P e Q due punti arbitrari del piano, P' e Q' i loro corrispondenti in una traslazione; per quanto abbiamo dimostrato, $PQQ'P'$ è un parallelogrammo. La simmetria che ha per centro il centro del parallelogrammo manda P in Q' e Q in P'; essendo essa un'isometria, si ha $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$.

Restano da vedere altre importanti proprietà delle traslazioni, ma, piuttosto che dimostrarle direttamente, è opportuno dedurle dalla rappresentazione cartesiana che ci proponiamo di ricavare nel prossimo paragrafo.

Esercizi

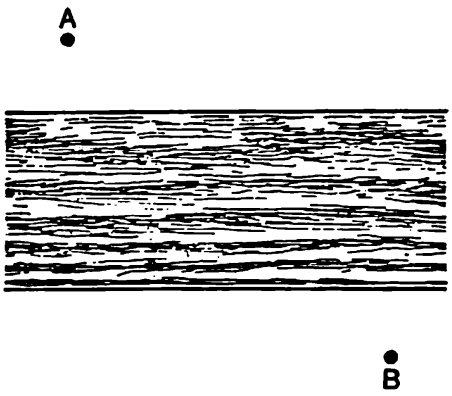
1 Una traslazione che manda un punto P nel punto P' (con $P \neq P'$) trasforma in sé ciascuno dei due semipiani individuati dalla retta PP'. Dimostrarlo.

* Da ora in poi segneremo con un quadratino nero la conclusione delle dimostrazioni.

2 Date due rette $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$, fra loro parallele, vi sono traslazioni che mandano $\mathcal{R}$ in $\mathcal{R}'$? Queste traslazioni come possono essere individuate? Come trasformano la striscia compresa fra $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$?

3 Fra tutte le traslazioni che mandano una retta $\mathcal{R}$ in una retta $\mathcal{R}'$, ad essa parallela, trovare quelle per cui $\overline{PP'}$ ha un valore d assegnato; trovare quella per cui $\overline{PP'}$ ha il valore minimo.

* **4** Si vogliano congiungere con una strada le località A e B, che si trovano da parte opposta rispetto al fiume (vedere figura). Il fiume deve essere attraversato perpendicolarmente dal ponte. Dove si deve costruire il ponte affinché la lunghezza della strada sia minima?



* **5** P e Q sono due punti fuori della retta $\mathcal{R}$. Trovare il minimo cammino per andare da P a Q percorrendo su $\mathcal{R}$ una distanza assegnata.

* **6** Dati nel piano due cerchi C, C', trovare un punto P in C ed un punto P' in C' in modo che il segmento $[P, P']$ abbia lunghezza e direzione assegnate.

16.3 Introduciamo il nostro solito riferimento cartesiano. Supponiamo che sia assegnata una traslazione t; sia $P \leftrightarrow (x, y)$ un qualsiasi punto, $P' \leftrightarrow (x', y')$ il suo corrispondente. Vogliamo trovare una relazione che esprima le coordinate (x', y') di P' mediante le coordinate (x, y) di P. La traslazione è assegnata, come abbiamo visto, quando è dato il corrispondente di un punto, comunque scelto. Supponiamo dunque che la nostra traslazione t mandi l'origine O nel punto $O' \leftrightarrow (h, k)$.

La rappresentazione cartesiana delle traslazioni

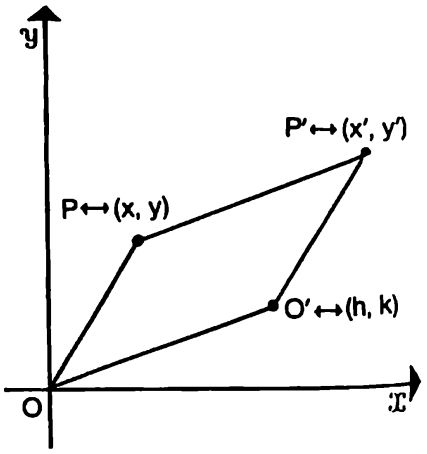


Fig. 9

Come abbiamo visto il quadrilatero $POO'P'$ è un parallelogrammo (eventualmente degenere). Le relazioni (6), che caratterizzano i parallelogrammi, ci dicono in questo caso:

$$\begin{cases} x' = x + h \\ y' = y + k \end{cases} \tag{7}$$

Questa è la relazione che cercavamo fra le coordinate di P e quelle di P'; è veramente semplicissima: *le coordinate di P' si ottengono sommando alle coordinate di P numeri costanti, che sono le coordinate del punto O', trasformato dell'origine O.*

Dunque, introdotto un qualsiasi riferimento cartesiano, la traslazione t si rappresenta mediante l'applicazione

$$(x , y) \longrightarrow (x + h , y + k) \tag{8}$$

Vale anche il risultato inverso, cioè:

I - *Ogni applicazione che, in un riferimento cartesiano, si esprime nella forma* (8) *è una traslazione.*

Per dimostrarlo, cominciamo col far vedere che l'applicazione (8) è bigettiva, cioè ammette inversa. Fissiamo allora una coppia qualsiasi (x' , y') e vediamo quali coppie vengono trasformate in essa dall'applicazione (8); si tratta dunque di considerare il sistema (7) in cui x' ed y' si ritengono note, mentre x e y sono incognite; otteniamo l'*unica* soluzione:

$$\begin{cases} x = x' - h \\ y = y' - k \end{cases} \tag{9}$$

Queste formule ci forniscono la rappresentazione dell'applicazione inversa; ritorneremo tra poco su questo risultato.

Per completare la dimostrazione verifichiamo che, presi due punti qualsiasi $P \leftrightarrow (x_1 , y_1)$, $Q \leftrightarrow (x_2 , y_2)$, i punti corrispondenti $P' \leftrightarrow (x'_1 , y'_1)$, $Q' \leftrightarrow (x'_2 , y'_2)$ sono tali che $PQQ'P'$ è un parallelogrammo.

Applichiamo ancora una volta le formule (6), cominciando dalla prima. Si tratta di vedere se è

$$x_1 + x'_2 = x'_1 + x_2$$

Sostituendo i valori di x'_1 e x'_2 si trova

$$x_1 + (x_2 + h) = (x_1 + h) + x_2$$

relazione che è senz'altro vera. Analogamente si procede per la seconda delle (6).

Per concludere che la nostra applicazione è una traslazione, basta dimostrare che essa verifica le proprietà 1) e 2) della definizione (vd. l'inizio del § precedente).

1) I punti si spostano tutti in una stessa direzione: infatti, prendiamo due punti qualsiasi P, Q; essendo $PQQ'P'$ un parallelogrammo, le rette PP' e QQ' sono parallele.

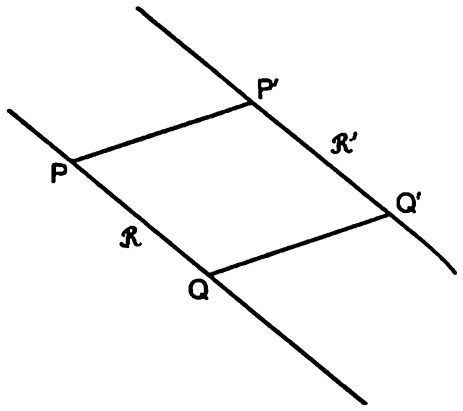


Fig. 10

2) Ogni retta viene trasformata in una retta ad essa parallela; infatti, sia $\mathcal{R}$ una retta qualsiasi e sia P un punto di essa; mandiamo la retta $\mathcal{R}'$, parallela ad $\mathcal{R}$ per il punto P', corrispondente di P. Prendiamo ora un punto Q qualsiasi di $\mathcal{R}$; essendo il quadrilatero $PQQ'P'$ un parallelogrammo, la retta $P'Q'$ è parallela alla retta PQ, cioè ad $\mathcal{R}$. Ma, essendo unica la parallela mandata ad $\mathcal{R}$ da P', la retta $P'Q'$ coincide con $\mathcal{R}'$; dunque il punto Q' sta su $\mathcal{R}'$. Quindi $\mathcal{R}$ viene trasformata in $\mathcal{R}'$ ■

D'ora in poi scriveremo $t \leftrightarrow (h, k)$ per indicare la traslazione $(x, y) \longrightarrow (x + h, y + k)$. I numeri h, k verranno detti le **componenti** della traslazione *t nel riferimento cartesiano adottato.*

Due coppie (h, k), (h', k') fra loro diverse rappresentano due traslazioni che mandano l'origine in due punti diversi, e quindi rappresentano due traslazioni diverse.

L'espressione della traslazione mette in evidenza [vd. i secondi membri delle (7)] un'operazione di addizione: viene allora spontaneo pensare che le proprietà delle traslazioni si possano semplicemente dedurre dalle proprietà dell'addizione. Vediamo!

Consideriamo due traslazioni:

$$t_1 : (x , y) \longrightarrow (x + h_1 , y + k_1)$$
$$t_2 : (x , y) \longrightarrow (x + h_2 , y + k_2)$$

Componiamole; qualunque sia l'ordine con cui le componiamo, il risultato finale è il medesimo:

$$t_2 \circ t_1 = t_2 \circ t_1 : (x , y) \longrightarrow (x + h_1 + h_2 , y + k_1 + k_2)$$

Dunque, in primo luogo, notiamo che *la composizione di due traslazioni è ancora una traslazione;*

in secondo luogo, la composizione delle traslazioni gode della proprietà *commutativa*; è anche evidente che vale la proprietà *associativa.*

Per queste proprietà ora viste, è ragionevole parlare di **somma** di traslazioni anziché di composizione, e utilizzare la notazione $+$, anziché la notazione $\circ$. Scriveremo dunque $t_1 + t_2$ in luogo di $t_1 \circ t_2$.

Fra le traslazioni c'è anche un elemento neutro, cioè la traslazione che, sommata con un'altra traslazione qualsiasi, la lascia invariata: è la traslazione $(0 , 0)$, che verrà indicata con o e verrà detta traslazione **nulla**. Questa traslazione lascia fermo ogni punto e quindi non è altro che l'applicazione identica del piano.

Infine, data una qualunque traslazione t, esiste una traslazione **opposta** della t, cioè una traslazione, che indicheremo con $-t$, tale che $t +$

$(-t) = o$. Evidentemente, se è $t \leftrightarrow (h, k)$, sarà $-t \leftrightarrow (-h, -k)$. Ritorniamo per un attimo alle (9): *cercando l'applicazione inversa della traslazione t noi avevamo trovato una traslazione: quella che ora abbiamo chiamato opposta della t.*

Possiamo concludere con questo enunciato preciso:

II - *La composizione (o somma) delle traslazioni gode delle seguenti proprietà: associativa, commutativa, esistenza dell'elemento neutro, esistenza dell'opposto.*

Osservazione. Abbiamo visto che la composizione delle traslazioni gode della proprietà associativa: ma si può osservare, piú in generale, che la *composizione delle applicazioni gode, in ogni caso, della proprietà associativa.* Per rendersene conto, osservare questo grafo, in cui si rappresenta il risultato della composizione delle tre applicazioni f, g, h (in questo ordine!). Si legge sul grafo che $h \circ (g \circ f)\ (A) = (h \circ g) \circ f(A) = D$.

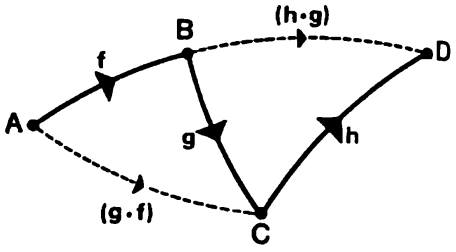


Fig. 11

Esercizi

1 Rappresentare la traslazione che porta il punto $P \leftrightarrow (2, 3)$ nel punto $P' \leftrightarrow (3, -2)$.

2 Data una traslazione $t \leftrightarrow (h, k)$, rappresentare la traslazione che si ottiene eseguendo n volte successivamente la t (cioè $\underbrace{t + t + \ldots + t}_{n \text{ volte}}$).

Analogamente per $-t$ (l'opposta di t).
Preso un qualsiasi punto P, dove si trovano i punti che da esso si ottengono applicando una, due, tre, ..., n volte la t o la $-t$?

3 Dare una nuova dimostrazione del fatto che ogni traslazione è un'isometria, utilizzando la rappresentazione cartesiana delle traslazioni [formula (8) di questo §] e la formula cartesiana della distanza [formula (9) del § 15.3].

4 Dimostrare che, data una qualsiasi traslazione t, è possibile, *prendendo il riferimento cartesiano in modo opportuno,* rappresentarla nella forma: $x' = x + h$, $y' = y$.

** **5** Data una traslazione non nulla t, quali sono gl'insiemi convessi del piano che sono trasformati in sé sia da t che da $-t$?

16.4 Un termine che viene impiegato, specialmente in fisica, come sinonimo di traslazione è quello di **vettore** (dal latino *vehere*, che vuol dire *portare*). **I vettori**

Nei libri di fisica un vettore è spesso indicato con una lettera sormontata da una freccetta, come $\vec{V}$; noi continueremo ad indicare i vettori (cioè ripetiamo, le traslazioni) con le lettere minuscole in grassetto: $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}, \ldots$

Come abbiamo visto, una traslazione (o vettore) si può indicare con una coppia di punti corrispondenti: (P, P'). Si può osservare che un vettore non nullo è individuato mediante:

l'**intensità** [cioè la lunghezza $\overline{PP'}$, che è la medesima per ogni coppia (P, P') che lo individua];

la **direzione** (cioè la direzione comune a tutte le rette PP' che uniscono due punti corrispondenti);

il **verso** [cioè l'ordinamento della coppia (P, P'): si tenga presente che le coppie (P, P') e (P', P) rappresentano due traslazioni opposte].

Naturalmente, al vettore nullo non si può attribuire alcuna direzione e alcun verso.

L'intensità di un vettore $\boldsymbol{v}$ viene anche detta **modulo** di $\boldsymbol{v}$ e viene indicata col simbolo $|\boldsymbol{v}|$.

Consideriamo ora due vettori $\boldsymbol{v} \leftarrow (P, P')$, $\boldsymbol{w} \leftarrow (P, P'')$ (abbiamo messo la freccia solo in un senso perché un vettore è rappresentato da infinite coppie di punti corrispondenti). Qui abbiamo preso le due coppie in modo che il primo punto sia il medesimo. Come si rappresenta la traslazione $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$? Si applicano al punto P le traslazioni $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ (non importa in quale ordine); il punto P viene portato nel punto P^*, che è il quarto vertice del parallelogrammo che ha come

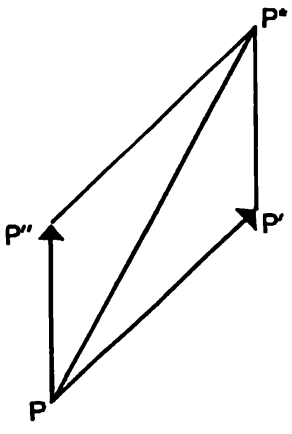


Fig. 12

vertici $P''PP'$. Si trova così la famosa «**regola del parallelogrammo**» per la somma dei vettori. Naturalmente, nel caso che v e w abbiano la stessa direzione, il parallelogrammo $P''PP'P^*$ risulta degenere e non può essere costruito con il solito procedimento. Basta però tener presente che il punto P^* deve essere anche in questo caso il punto simmetrico del punto P nella simmetria che ha come centro il punto di mezzo del segmento $[P', P'']$. Si trova (ved. fig. 13) che $v + w$ ha la direzione comune di v e w; se v e w hanno lo stesso verso, $v + w$ ha un'intensità somma delle intensità, e ancora il medesimo verso; se v e w hanno verso opposto, l'intensità è la differenza delle intensità e il verso è quello del vettore che prevale come intensità. Si tratta, insomma, di risultati che avevamo già *intuitivamente* ben presenti quando abbiamo definito la somma di due numeri relativi. (Ricordare l'inizio del cap. 8).

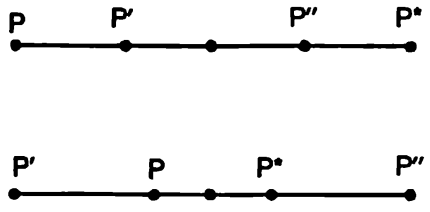


Fig. 13

Dalla costruzione del parallelogrammo (vd. la figura 13), ricordando la disuguaglianza triangolare, si ottiene subito questa relazione per le intensità (o moduli) dei vettori v, w, $v + w$:

$$| v + w | \leq | v | + | w | \qquad (10)$$

Se si prende un riferimento cartesiano, con origine in O, i vettori si rappresentano con le coordinate del punto O' corrispondente di O; la somma dei vettori si rappresenta allora mediante la somma «componente per componente».

Posto $v \leftrightarrow (h, k)$, $w \leftrightarrow (l, m)$, si ha

$$v + w \leftrightarrow (h + l, k + m) \qquad (11)$$

Vale poi, evidentemente, la seguente formula per l'intensità del vettore v:

$$| v | = \sqrt{h^2 + k^2} \qquad (12)$$

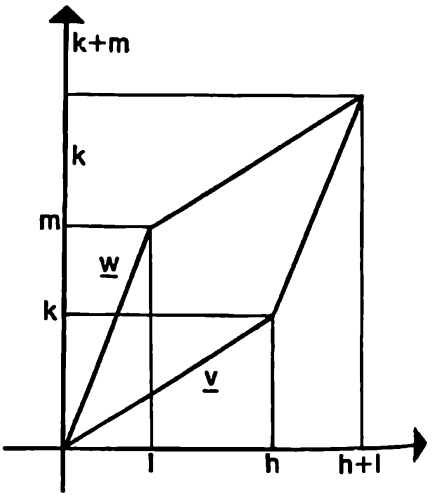


Fig. 14

Dato un vettore $v \leftrightarrow (h, k)$ e dato un intero $n > 0$, è naturale scrivere nv per indicare la traslazione che si ottiene eseguendo n volte di seguito la traslazione v:

$$nv \leftrightarrow (nh, nk)$$

Risulta allora naturale definire il *prodotto di un qualunque numero reale* x *per un vettore* v in questo modo:

$$xv \leftrightarrow (xh, xk) \tag{13}$$

In altre parole: il prodotto per x viene eseguito componente per componente. Notiamo che $(-1)v$ è il vettore opposto di v, che abbiamo già indicato con $-v$ (opposto di v). Si ha poi

$$|xv| = |x| \ |v| \tag{14}$$

dove, naturalmente, $|x|$ è il valore assoluto del numero reale x. Infatti, è

$$|xv| = \sqrt{x^2h^2 + x^2k^2} = \sqrt{x^2(h^2 + k^2)} =$$
$$= \sqrt{x^2}\sqrt{h^2 + k^2} = |x|\sqrt{h^2 + k^2} = |x| \ |v|$$

In questi passaggi abbiamo fatto uso delle seguenti proprietà dell'operazione « radice quadrata »:

a) la radice quadrata del prodotto di due numeri positivi è uguale al prodotto delle radici quadrate di questi;

b) per ogni numero reale x, la radice quadrata di x^2 è uguale ad $|x|$. (Occorre ricordare che con $\sqrt{a}$ intendiamo indicare quel numero *non negativo* b tale che $b^2 = a$).

Ed ora eseguiamo alcuni esercizi, con lo scopo di vedere come la nozione di vettore può essere applicata allo studio di vari ed interessanti problemi.

a) Dato un riferimento cartesiano, consideriamo i seguenti vettori:

$$v_1 \leftrightarrow (-1, 1) \ , \ v_2 \leftrightarrow (-1, -1)$$

$$v_3 \leftrightarrow (1, -1) \ , \ v_4 \leftrightarrow (1, 1)$$

Dove va a finire un punto P qualunque, quando gli si applicano successivamente questi vettori? Si vede che il punto descrive i vertici di un quadrato, ritornando infine al punto di partenza. Quest'ultima circostanza era facilmente prevedibile notando che $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = o$.

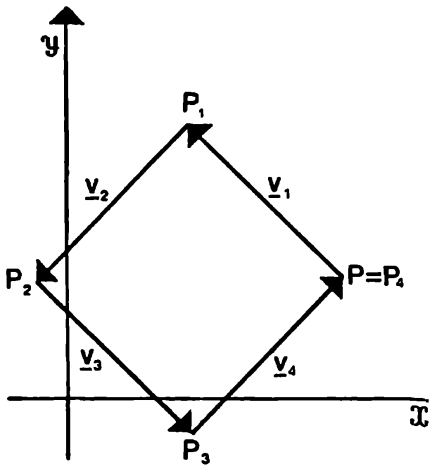


Fig. 15

b) I vettori servono spesso per rappresentare le **forze**. Dalla statica sappiamo che l'effetto di piú forze applicate ad uno stesso punto è quello dell'unica forza (detta **risultante**) determinata con la regola del parallelogrammo. Consideriamo ora tre forze v_1 , v_2 , v_3 di uguale intensità giacenti in uno stesso piano, applicate ad uno stesso punto O e formanti fra loro angoli uguali cioè di 120°. (Conosciamo la misura degli angoli dalle scuole medie; comunque, ritorneremo piú avanti su questo argomento).

Per sommare queste tre forze, prendiamo un sistema cartesiano con origine in O e tale che v_1 sia diretta secondo il semiasse positivo di x. Sia l l'intensità comune delle forze; tenendo presente che v_2 e v_3 formano un angolo di 60° con il semiasse negativo di x, si ha:

$$v_1 \leftrightarrow (l, 0) \ , \ v_2 \leftrightarrow \left(-\frac{l}{2} \ , \ \frac{\sqrt{3}}{2} l\right)$$

$$v_3 \leftrightarrow \left(-\frac{l}{2} \ , \ -\frac{\sqrt{3}}{2} l\right)$$

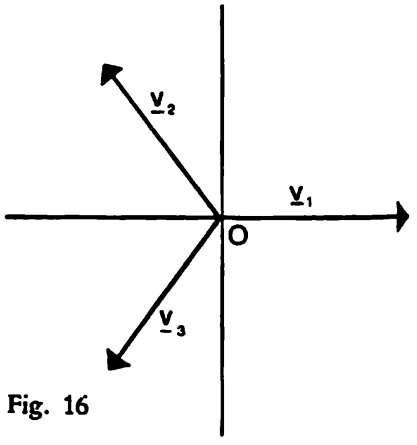


Fig. 16

Si vede allora subito che

$$v_1 + v_2 + v_3 = o$$

Del resto, il risultato era prevedibile per ragioni di simmetria: una rotazione di 120° deve fare ruotare di 120° anche il vettore somma. Ma con una rotazione di 120° la somma rimane inalterata perché i tre vettori si scambiano semplicemente fra loro. Poiché solo il vettore nullo si mantiene inalterato dopo una rotazione di 120°, si conclude che la somma è nulla.

c) I vettori vengono spesso impiegati per descrivere *il moto di un punto* (la scienza che descrive il moto è chiamata *cinematica*). In cinematica, un vettore viene impiegato, in primo luogo, per rappresentare lo **spostamento** subito da un punto e la somma dei vettori indica lo spostamento finale di un punto che è stato assoggettato a piú spostamenti successivi. In qualche caso gli spostamenti si attuano simultaneamente, ma per studiarli meglio si finge che si verifichino successivamente.

Consideriamo questo interessante problema. La corrente di un fiume ha in ogni punto la stessa direzione, e la stessa velocità, di 0,4 m/s (metri al secondo). Una barca a motore, che sviluppa la velocità di 1 m/s, attraversa il fiume puntando in direzione perpendicolare alle rive; ci chiediamo: quale è la velocità della barca rispetto alle rive? Precisiamo: se ad un certo istante la barca si trova nel punto O e dopo un secondo nel punto O′, il vettore (O , O′), che rappresenta lo spostamento compiuto nell'unità di tempo, esprime la sua **velocità.** Introduciamo un sistema cartesiano con origine nel punto O e tale che il semiasse positivo di $\mathfrak{x}$ sia diretto come la corrente.

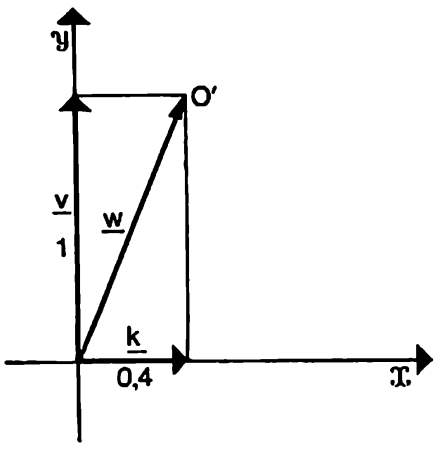


Fig. 17

Se l'acqua fosse ferma, la nostra barca dopo 1 secondo si troverebbe spostata di 1 metro in direzione ortogonale alla corrente, cioè in direzione dell'asse $\mathfrak{y}$. Ammettiamo ora, ragionevolmente,

che rispetto all'acqua il moto della barca sia quello che sarebbe se l'acqua fosse ferma.

Indichiamo con v il vettore che esprime la velocità propria della barca; dunque v è diretto secondo l'asse $\mathfrak{y}$ e ha intensità 1. Ma poiché durante un secondo l'acqua, e tutto ciò che essa contiene si sposta di un vettore k, di intensità 0,4, diretto secondo l'asse delle $\mathfrak{x}$, nel verso positivo, lo spostamento che si effettua in un secondo *rispetto alle rive* è

$$w = v + k \qquad (15)$$

La rappresentazione cartesiana di w è $w \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (0\,,1) + (0{,}4\,,0) = (0{,}4\,,1)$. Se la barca punta in un'altra direzione, sempre alla velocità di 1 m/s, la sua velocità rispetto alle rive è ancora data dalla (15) e si ottiene sempre applicando la regola del parallelogrammo. Naturalmente, il supporre che si compia prima il moto proprio della barca e, successivamente, la deriva operata dalla corrente è una finzione. I due moti avvengono simultaneamente e perciò, in realtà, la barca si muove lungo la diagonale del parallelogrammo.

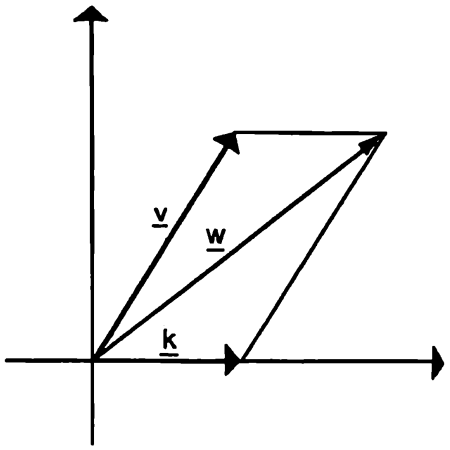


Fig. 18

d) I vettori si possono utilizzare in moltissimi campi: ad esempio in *economia*. Supponiamo, per fare un esempio semplice, che una società siderurgica produca sia acciaio che ghisa. La produzione annua complessiva può allora essere rappresentata da un vettore $v \leftrightarrow (h\,,k)$, dove la prima componente, h, indica la quantità di acciaio prodotta (in tonnellate), la seconda componente, k, indica la quantità di ghisa prodotta (in tonnellate). Supponiamo che una seconda società, di tipo analogo, abbia la produzione rappresentata da un vettore $w \leftrightarrow (l\,,m)$. (La prima componente si riferisce sempre all'acciaio, la seconda alla ghisa). Supponiamo che le due società decidano di unirsi: allora la produzione complessiva sarà rappresentata dal vettore

$$v + w \leftrightarrow (h + l\ ,\ k + m)$$

Supponiamo invece che la prima società decida di raddoppiare la sua produzione; la nuova produzione sarà rappresentata dal vettore

$$2v \leftrightarrow (2h\,,\,2k)$$

In esempi di questo tipo la rappresentazione cartesiana fa parte del problema in modo essenziale; altrimenti non potremmo distinguere l'acciaio dalla ghisa.

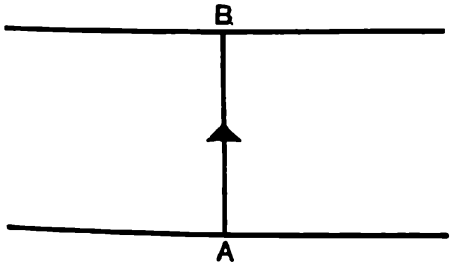
Nel caso in cui i beni prodotti siano piú di due, si capisce facilmente che occorrerà servirsi di vettori a piú di due componenti, che non si possono rappresentare su un piano ma che si maneggiano con lo stesso tipo di operazioni che abbiamo visto ora. Gli *spazi vettoriali* (come vengono chiamati in generale) sono molto importanti sia all'interno della matematica che per le applicazioni alle scienze e alle attività umane.

Esercizi

1 Riprendiamo il problema della barca con i dati già considerati (corrente del fiume 0,4 m/s; barca puntata in direzione perpendicolare alla corrente, alla velocità di 1 m/s).
Supponiamo che il fiume (schematizzato dalla striscia limitata da due rette parallele $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$) sia largo 400 m. Quanto tempo si impiega a compiere l'intera traversata?

2 Lasciando fermi tutti gli altri dati, supponiamo che la barca si diriga a 45° rispetto alle rive, contro corrente. Quali sono le componenti della sua velocità rispetto alle rive? Quanto tempo impiega per compiere la traversata?

* **3** In quale direzione si deve puntare se si vuole che il moto della barca rispetto alle rive avvenga lungo un segmento perpendicolare alle rive? In quanto



tempo si attraverserà il fiume? (Qui si chiede di determinare il vettore $\boldsymbol{v}$ che esprime la velocità propria della barca, per mezzo delle sue componenti sapendo che è sempre $|\boldsymbol{v}| = 1$: si comincerà eseguendo la costruzione geometrica del vettore $\boldsymbol{v}$).

** **4** Dimostrare che il moto descritto nell'esercizio precedente è quello che consente di compiere la traversata fra i due punti contrapposti delle rive A e B nel minor tempo possibile. (Si ammette che la barca sviluppi sempre la velocità costante di 1 m/s e che possa andare da A a B lungo un qualsiasi percorso).

* **5** Supponiamo ora che la velocità della corrente sia maggiore della velocità della barca (ad. es. 1 m/s la velocità della corrente, 0,6 m/s la velocità della barca). Quali sono i punti della sponda opposta che è possibile raggiungere partendo da un punto A?
(Si chiede di fare la costruzione geometrica dei vettori $\boldsymbol{w}$ che si possono ottenere in base alle diverse direzioni che la barca può assumere. Si sceglierà quella che consente di arrivare alla sponda opposta piú «a monte» possibile; successivamente si può procedere al calcolo).

6 Un aereo viaggia da una città A ad una città B, distanti d km, e ritorna. La sua velocità rispetto all'aria circostante è di v km/h. Però il vento soffia costantemente alla velocità di k km/h ($k < v$) da A a B. Quale è il tempo impiegato complessivamente? È piú o meno del tempo che impiegherebbe se non ci fosse il vento? (Si trascurano le perdite di tempo dovute ai decolli e alla discesa).

7 Modifichiamo l'esercizio precedente, supponendo che il vento soffi costantemente in una direzione *perpendicolare* ad AB.
Supponiamo che l'aereo si orienti in modo tale che la sua rotta effettiva (cioè rispetto alla terra) sia la retta AB. Quale è il tempo che impiega per l'intero percorso? È maggiore o minore di quello impiegato nella situazione dell'esercizio precedente? Fare il calcolo numerico con i seguenti dati: $d = 1000$ km, $v = 400$ km/h , $k = 80$ km/h.

** **8** Due navi stanno muovendosi con velocità costanti rappresentate dai vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$. Ad uno stesso istante si trovano nei punti A e B, rispettivamente. Si chiede di determinare i punti delle rispettive rotte per cui la distanza fra le navi è minima: dare una soluzione sintetica, con un disegno accurato. (Se una delle due navi fosse ferma, il problema sarebbe facilmente risolubile: si può allora fare come se una delle due navi fosse ferma, e studiare il moto relativo dell'altra nave rispetto ad essa...).

Traslazioni e simmetrie

16.5 Esponiamo alcune osservazioni complementari riguardanti le traslazioni. Abbiamo visto (nel cap. 14) che una simmetria centrale si può vedere come composizione di due simmetrie assiali.

Vogliamo vedere che una traslazione si può anch'essa ottenere come la *composizione di due simmetrie assiali*; cominceremo però col dimostrare che *una traslazione si può ottenere come prodotto di due simmetrie centrali.*

Premettiamo ancora un teorema esprimente una nuova proprietà delle traslazioni:

I - *Siano dati quattro punti ABCD con le seguenti proprietà:*

a) *C e D si trovano nello stesso semipiano rispetto alla retta AB;*

b) *le rette AC e BD sono parallele;*

c) $\overline{AC} = \overline{BD}$.

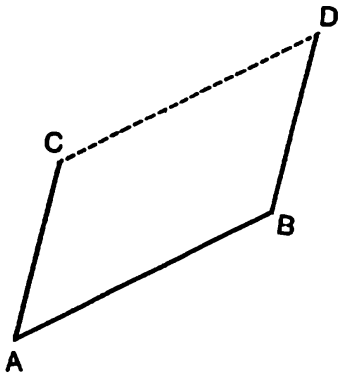


Fig. 19

Allora, la traslazione che porta A in B porta C in D; in altre parole CABD è un parallelogrammo.

Infatti, la traslazione che porta A in B, trasforma la retta AC in una retta ad essa parallela passante per B: questa non può essere che la retta BD. Il punto C va a finire in un punto C' che si trova nello stesso semipiano di C rispetto alla retta AB: infatti $[C, C']$ non ha punti in comune con la retta AB essendo parallelo ad essa. Il punto C' si trova sulla semiretta BD, a distanza $\overline{AC} = \overline{BD}$ dal punto B. Allora esso coincide con il punto D. In conclusione, come volevamo dimostrare, la traslazione che porta A in B porta C in D ■

Ed ecco in forma precisa il teorema che abbiamo preannunciato:

II - *Una traslazione t che manda P in P' può essere ottenuta come prodotto di due simmetrie centrali: la prima σ* con centro nel punto P, la seconda τ con centro nel punto di mezzo M del segmento* $[P, P']$.

Anzitutto, è evidente che la prima simmetria lascia fermo il punto P, mentre la seconda manda P

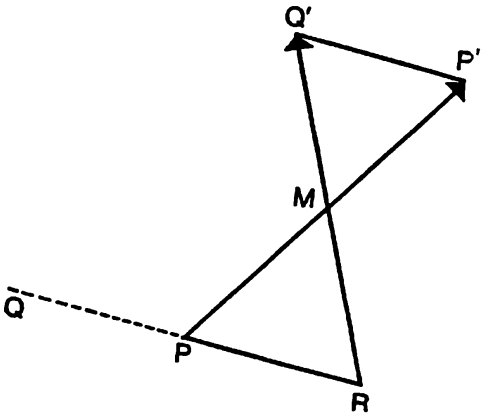


Fig. 20

* σ è una lettera dell'alfabeto greco; si legge « sigma »; così pure τ (« tau »). Vedere l'alfabeto a pag. 33.

in P'; dunque l'applicazione composta manda P in P'. Per dimostrare che $\tau \circ \sigma$ è una traslazione (e coincide allora con t) resta da vedere (ricordare la definizione di traslazione) :

a) che essa trasforma ogni retta in una retta ad essa parallela;

b) che tutti i punti si muovono in una medesima direzione (quella della retta PP').

La *a*) è ovvia perché ogni simmetria centrale trasforma una retta in una retta ad essa parallela; dunque ogni retta viene trasformata da σ in una retta parallela, e questa ancora da τ in una retta parallela.

Resta da dimostrare la *b*); sia Q un punto qualsiasi; se esso si trova sulla retta PP', è chiaro che le due simmetrie centrali lo trasformano in un punto della retta PP'.

Vediamo che cosa succede se il punto Q è fuori della retta PP'; la simmetria σ con centro in P lo trasforma in un punto R tale che $\overline{QP} = \overline{RP}$; la simmetria τ trasforma R in un Q'; poiché la stessa simmetria τ porta P in P'; si ha $\overline{PR} = \overline{P'Q'}$ (ricordare che le simmetrie sono isometrie!) e quindi $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$. Ora riflettiamo che Q e Q' si trovano nello stesso semipiano rispetto alla retta PP', essendo entrambi nel semipiano opposto a quello che contiene R. La retta PQ è parallela alla $P'Q'$, essendo corrispondente di essa nella simmetria con centro M; allora per il teorema dimostrato, la traslazione che porta P in P' porta Q in Q'; si conclude che, qualunque sia il punto Q, applicando a Q successivamente la simmetria σ e la simmetria τ, si ottiene lo stesso risultato che si ottiene applicando la traslazione t. Si conclude: $t = \tau \circ \sigma$ ■

Osservazione importante. La dimostrazione svolta fa vedere che la composizione di due simmetrie centrali *qualunque* è una traslazione: infatti (con

le notazioni impiegate) il punto P e il punto M, centri delle simmetrie, possono essere presi come si vuole.

Ora è molto facile dimostrare l'altro dei risultati che abbiamo preannunciato:

III - *Ogni traslazione può essere ottenuta componendo due simmetrie assiali, con assi fra loro paralleli.*

Sia t la traslazione che manda P in P'; possiamo supporre $P \neq P'$: nel caso $P = P'$ quello che vogliamo dimostrare è evidente perché t si riduce all'identità. Sappiamo che ogni simmetria centrale si può ottenere come composizione di simmetrie assiali con assi passanti per il centro e ortogonali fra loro. Indichiamo con $\mathcal{R}$ la retta PP', con $\mathcal{S}$ la perpendicolare ad $\mathcal{R}$ mandata per il punto P, con $\mathcal{U}$ la perpendicolare ad $\mathcal{R}$ mandata per il punto di mezzo M del segmento $[P, P']$. Si ha, indicando sempre con σ la simmetria con centro P e con τ la simmetria con centro M,

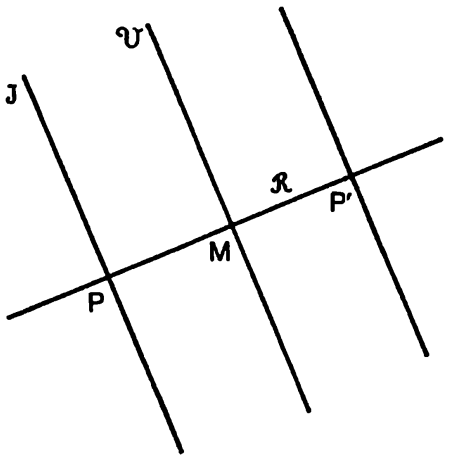


Fig. 21

$$\sigma = s_{\mathcal{R}} \circ s_{\mathcal{S}} \quad , \quad \tau = s_{\mathcal{U}} \cdot s_{\mathcal{R}}$$

perciò

$$t = \tau \circ \sigma = s_{\mathcal{U}} \circ s_{\mathcal{R}} \circ s_{\mathcal{R}} \circ s_{\mathcal{S}} = s_{\mathcal{U}} \circ s_{\mathcal{S}}$$

dal momento che $s_{\mathcal{R}} \circ s_{\mathcal{R}}$ è l'identità, per il carattere involutorio della simmetria ■

Quindi abbiamo dimostrato che la traslazione si può ottenere come prodotto di due simmetrie assiali, con assi fra loro paralleli.

Osservazione. Le dimostrazioni svolte ci fanno vedere che ci sono infiniti modi di decomporre una traslazione in due simmetrie centrali (o assiali); infatti, la coppia (P, P') di punti corrispondenti può essere presa in infiniti modi.

Vocaboli e simboli

traslazioni, **vettori** t, v, w, ...
$v \leftrightarrow (h, k)$ (k e k, **componenti** di v)
intensità (**modulo**) di v : $|v|$
direzione, **verso** (di un vettore non nullo)
forza
risultante (di due forze)
spostamento
velocità
metodo analitico: si designa così un metodo basato sull'impiego delle coordinate cartesiane e sulla traduzione di un problema in un problema algebrico
metodo sintetico: si designa così un metodo risolutivo basato sui soli assiomi della geometria e sull'impiego di costruzioni geometriche

Esercizi

1 Un quadrilatero *convesso* che ha due lati opposti paralleli e di uguale lunghezza è un parallelogrammo.

2 Dato un triangolo, la retta che congiunge i punti di mezzo di due lati è parallela al terzo.
(Sia ABC il triangolo, sia D il punto di mezzo del lato $[A, C]$ ed E il punto di mezzo del lato $[B, C]$: la traslazione che porta A in B si può esprimere come prodotto della simmetria con centro D con la simmetria con centro E; questa traslazione dove porta il punto D?).

3 Facendo uso delle coordinate cartesiane, dare una nuova dimostrazione del fatto che la composizione di due simmetrie centrali è una traslazione.

4 Siano $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ due rette non parallele; ogni vettore del piano può essere ottenuto come somma di un vettore che ha la direzione di $\mathcal{R}$ con un vettore che ha la direzione di $\mathcal{S}$.

5 Siano $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ due vettori di uguale intensità 1; in quali casi l'intensità di $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ risulta maggiore di 1?

* **6** Considerare il prodotto di una traslazione non nulla per una simmetria assiale con asse parallelo alla traslazione: dimostrare che è un'isometria senza punti fissi e non è una traslazione.

* **7** Considerare il prodotto di una traslazione per una simmetria assiale con asse perpendicolare alla traslazione: dimostrare che è una simmetria assiale e caratterizzarla rispetto ai dati.

I matematici sono grandi consumatori di simboli; le lettere dell'alfabeto latino non bastano ed è opportuno ricorrere all'alfabeto greco, che trascriviamo qui sotto precisando, per ogni lettera, il nome con cui viene indicata e il suono.

Maiuscola	Minuscola	Nome	Suono
A	α	alfa	a
B	β	beta	b
Γ	γ	gamma	g (dura)
Δ	δ	delta	d
E	ε	èpsilon	e (breve)
Z	ζ	zeta	z
H	η	eta	e (lunga)
Θ	ϑ	teta	th
I	ι	iota	i
K	κ	cappa	k
Λ	λ	lambda	l
M	μ	mi (mu)	m
N	ν	ni (nu)	n
Ξ	ξ	xi	x
O	ο	òmicron	o (breve)
Π	π	pi	p
P	ρ	ro	r
Σ	σ	sigma	s
T	τ	tau	t
Υ	υ	üpsilon	ü (u francese)
Φ	φ	fi	f = ph
X	χ	chi	kh
Ψ	ψ	psi	ps
Ω	ω	òmega	o (lunga)

17

Rette e sistemi lineari

17.1 Come abbiamo già affermato, la geometria analitica si può considerare come un dizionario che permette di passare dal linguaggio della geometria a quello dell'algebra e viceversa. Ad esempio, un *punto* P del piano viene tradotto in una *coppia di numeri* (x, y) (le coordinate di P). Un *cerchio* viene tradotto in una particolare *equazione*; ad es., il cerchio di centro $(1, 3)$ e raggio 2 viene tradotto nell'equazione $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$: il fatto che il punto P, di coordinate $(3, 3)$ *sta sul cerchio* viene tradotto nel fatto che la coppia $(3, 3)$ *verifica l'equazione* $(3-1)^2 + (3-3)^2 = 2^2 = 4$, ecc.

Equazione di una retta passante per l'origine

Fino ad ora, manca dal nostro dizionario un personaggio di notevole importanza: la retta. Abbiamo rappresentato solo particolari tipi di rette: le rette parallele agli assi, quelle «verticali» (cioè parallele all'asse $\mathfrak{y}$), che abbiamo rappresentato con un'equazione del tipo $x = a$, quelle «orizzontali» (cioè parallele all'asse $\mathfrak{x}$), che abbiamo rappresentato con un'equazione del tipo $y = b$ (rivedere il § 16.1). Notiamo che *l'equazione* $x = a$ *deve essere intesa come una relazione che riguarda la coppia* (x, y)*:* x *è fissata uguale ad* a*, mentre la* y*, che non compare nell'equazione, può avere un valore arbitrario.* Analogamente per l'equazione $y = b$.

Ci proponiamo ora di rappresentare una qualsiasi retta che passa per l'origine O degli assi cartesiani. Premettiamo qualche ulteriore elemento di nomenclatura. Gli assi $\mathfrak{x}$ ed $\mathfrak{y}$ suddividono il piano

in quattro regioni angolari che sono dette **quadranti**. Si dice:

primo quadrante l'angolo individuato dal semiasse positivo di $\mathfrak{X}$ e dal semiasse positivo di $\mathfrak{Y}$, cioè l'insieme dei punti $P \leftrightarrow (x, y)$ con $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

secondo quadrante l'angolo individuato dal semiasse positivo di $\mathfrak{Y}$ e dal semiasse negativo di $\mathfrak{X}$, cioè l'insieme dei punti $P \leftrightarrow (x, y)$ con $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$;

terzo quadrante l'angolo individuato dal semiasse negativo di $\mathfrak{X}$ e dal semiasse negativo di $\mathfrak{Y}$, cioè l'insieme dei punti $P \leftrightarrow (x, y)$, con $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$;

quarto quadrante l'angolo individuato dal semiasse negativo di $\mathfrak{Y}$ e dal semiasse positivo di $\mathfrak{X}$, cioè l'insieme dei punti $P \leftrightarrow (x, y)$, con $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$.

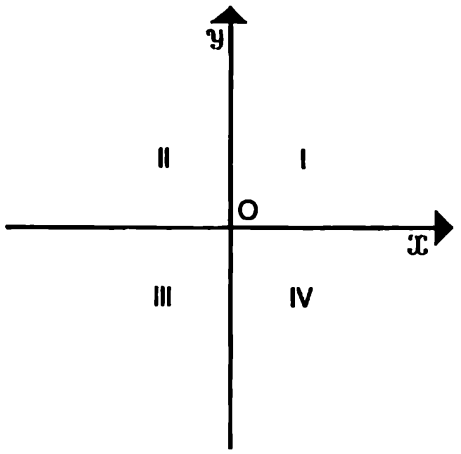


Fig. 1

È evidente che una retta passante per l'origine e non coincidente con uno degli assi sta nel primo e nel terzo quadrante, oppure nel secondo e nel quarto quadrante. (Infatti, se una semiretta sta in un angolo ed ha origine nel vertice, la semiretta opposta sta nell'angolo opposto).

Per rappresentare algebricamente una qualunque retta $\mathcal{R}$ passante per l'origine, vogliamo considerare $\mathcal{R}$ come asse di un segmento avente l'origine come punto di mezzo. Il metodo che seguiamo si basa dunque essenzialmente sulla *distanza.*

Prendiamo un punto $Q \leftrightarrow (a, b)$, *diverso dall'origine* O; il suo simmetrico rispetto all'origine sarà $Q' \leftrightarrow (-a, -b)$. La retta $\mathcal{R}$ che vogliamo rappresentare è *l'insieme dei punti che hanno uguale distanza da Q e da Q'.*

Sia $P \leftrightarrow (x, y)$ un punto qualsiasi della retta $\mathcal{R}$; anziché scrivere $\overline{PQ} = \overline{PQ'}$ sarà piú comodo scri-

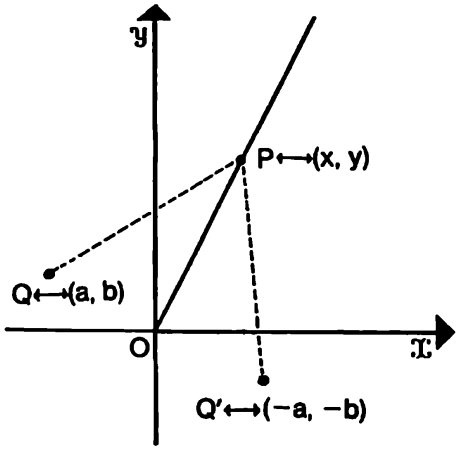


Fig. 2

vere $\overline{PQ}^2 = \overline{PQ'}^2$. Dall'espressione cartesiana della distanza ricaviamo allora

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (x + a)^2 + (y + b)^2 \qquad (1)$$

Sviluppando si ricava

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 =$$
$$= x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + 2by + b^2$$

e, semplificando,

$$-2ax - 2by = 2ax + 2by$$

da cui

$$4ax + 4by = 0$$

e, infine,

$$ax + by = 0 \qquad (2)$$

Questa è l'equazione che cercavamo. Notiamo che tutti i passaggi algebrici eseguiti per andare dalla (1) alla (2) si possono invertire, perciò la (2) esprime il fatto che il punto $P \leftrightarrow (x, y)$ ha uguale distanza da $Q \leftrightarrow (a, b)$ e da $Q' \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (-a, -b)$. Possiamo dunque affermare che *ogni* equazione della forma (2) con a e b non entrambi nulli rappresenta una retta passante per l'origine: l'asse del segmento $[Q, Q']$, con $Q \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (a, b)$, $Q' \leftrightarrow (-a, -b)$.

Dalla (2), se è $b \neq 0$, si ricava

$$y = -\frac{a}{b}\, x$$

Ponendo $-\frac{a}{b} = p$, l'equazione (2) può essere

scritta nella forma

$$y = px \qquad (3)$$

In questo modo, la nostra retta è rappresentata come grafico della funzione $x \to px$ (che esprime la **legge della proporzionalità diretta**). Facendo $x = 1$ si ottiene $y = p$; dunque la retta rappresentata dalla (3) passa per il punto $P \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (1\,,\,p)$. Il numero p viene detto **pendenza** o anche **coefficiente angolare** della retta. Notiamo che se si fa crescere p la retta diventa sempre piú inclinata sull'asse $\mathfrak{X}$. Se p è positivo, la retta rappresentata dalla (3) si trova nel primo e nel terzo quadrante, se p è negativo si trova nel secondo e nel quarto.

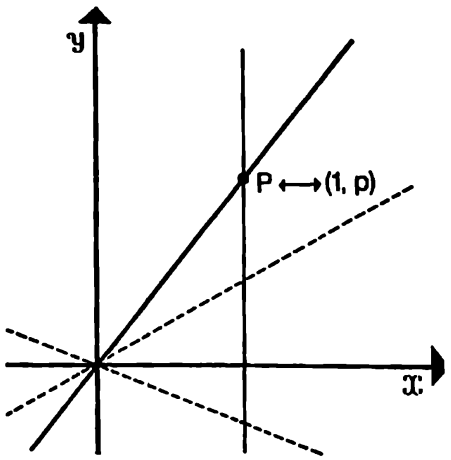


Fig. 3

Per passare alla forma (3) abbiamo supposto $b \neq 0$; che cosa succede se è $b = 0$? In questo caso i punti Q e Q′ si trovano sull'asse $\mathfrak{X}$ e la retta $\mathfrak{R}$ coincide con l'asse $\mathfrak{Y}$. L'asse $\mathfrak{Y}$ non può rientrare nella forma (3), mentre rientra nella forma (2), essendo rappresentato dall'equazione $x = 0$, cioè $1 \cdot x = 0$.

Nella forma (2) rientrano *tutte* le rette passanti per l'origine; notiamo che *nella forma* (2) *l'equazione non è univocamente determinata dalla retta*: ad esempio le equazioni $2x - 3y = 0$, $4x - 6y = 0$ rappresentano la stessa retta (la seconda equazione è ottenuta dalla prima moltiplicandola membro a membro per 2, quindi le due equazioni hanno le stesse soluzioni). Una retta non coincidente con l'asse $\mathfrak{Y}$ si rappresenta invece *in modo unico nella forma* (3); per rendersene conto, basta pensare al significato che ha il coefficiente p.

La (2) è molto espressiva: le coordinate del punto $Q \leftrightarrow (a\,,\,b)$ e del punto $P \leftrightarrow (x\,,\,y)$ entrano in essa in modo simmetrico: questo non fa meraviglia perché la (2) ci dice che le rette OP ed OQ sono fra loro ortogonali, e noi sappiamo che l'ortogonalità è una relazione simmetrica.

Ora siamo in grado di trovare l'equazione della retta che passa per l'origine ed è perpendicolare ad una retta $y = px$ assegnata (con $p \neq 0$). Basta tenere presente che questa retta è caratterizzata dal fatto di passare, oltre che per l'origine, per il punto $(1 , p)$ come abbiamo visto. Allora, in base alla (2), la retta perpendicolare è

$$1 \cdot x + p \cdot y = 0$$

cioè

$$y = -\frac{1}{p} x \qquad (4)$$

Dunque, *la pendenza della retta perpendicolare è uguale all'opposto del reciproco della pendenza della retta assegnata.*

Ad esempio, la retta per l'origine ortogonale alla retta $y = x$ è la retta $y = -x$; la retta per l'origine ortogonale alla retta $y = 5x$ è la retta $y = -\frac{1}{5} x$.

Esercizi

1 Scrivere l'equazione delle rette passanti per l'origine e per i punti di coordinate: $(3 , 5)$, $(-3 , -5)$, $\left(\frac{1}{2} , \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(1 , n)$ (n intero).

2 Scrivere l'equazione delle rette passanti per l'origine e ortogonali alle rette considerate nell'esercizio precedente.

3 Data una retta per l'origine nella forma (2), scrivere direttamente l'equazione della retta ortogonale passante per l'origine. [Trovare prima le coordinate di un punto diverso dall'origine che sta sulla retta (2)].

4 Dato un riferimento cartesiano, consideriamo l'insieme H formato dai punti che hanno entrambe le coordinate intere, come, ad es.: $(1 , 2)$, $(0 , 0)$, $(-2 , 3)$. Vi sono rette che passano per l'origine e non passano per altri punti di H? Come si possono individuare? Vi sono rette passanti per l'origine che incontrano solo un numero finito di altri punti di H?

* **5** Quali sono le traslazioni che trasformano l'insieme H, introdotto nell'esercizio precedente, in sé? Quali sono le simmetrie assiali e centrali che lo trasformano in sé?

17.2 Ora ci proponiamo di rappresentare una retta *qualsiasi* del piano. Sia $P_0 \leftrightarrow (x_0 , y_0)$ un punto qualsiasi di $\mathcal{R}$ e sia t la traslazione che manda il punto P_0 nell'origine; indicando con (x , y) le coordinate di un punto P, con (x' , y') le coordinate del punto traslato P', l'equazione della traslazione sarà

Equazione di una retta qualsiasi

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \qquad (5)$$

Infatti è evidente che questa è l'equazione di una traslazione [ricordare la formula (7) del § 16.3] e che essa manda il punto $P_0 \leftrightarrow (x_0 , y_0)$ nel punto $O \leftrightarrow (0 , 0)$.

La retta $\mathcal{R}$ viene trasformata dalla t in una retta $\mathcal{R}'$, parallela ad $\mathcal{R}$, passante per l'origine. *Un punto P sta sulla retta $\mathcal{R}$ se e solo se il corrispondente punto P' sta sulla retta $\mathcal{R}'$.*

Per quanto abbiamo visto nel § precedente, la retta $\mathcal{R}'$ si può rappresentare con un'equazione della forma

$$ax' + by' = 0 \qquad (6)$$

dove i coefficienti a e b non sono entrambi nulli. Allora il punto (x , y) sta sulla retta $\mathcal{R}$ se e solo se si ha

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \qquad (7)$$

Questa si può scrivere $ax + by = ax_0 + by_0$, cioè

$$ax + by = c \qquad (8)$$

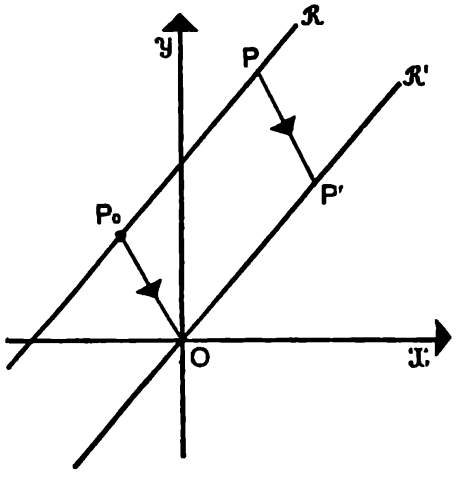


Fig. 4

avendo posto $ax_0 + by_0 = c$.

Dunque, possiamo affermare:

1) *Ogni retta del piano si può rappresentare con un'equazione del tipo* (8) (*con a e b non entrambi nulli*).

2) *Ogni equazione del tipo* (8) *con a e b non entrambi nulli rappresenta una retta.* Infatti, osserviamo che, data un'equazione $ax + by = c$ (sempre con a e b non entrambi nulli) è possibile trovare una coppia di numeri (x_0 , y_0) che la verifica: supponiamo, ad esempio, che sia $a \neq 0$; preso ad arbitrio un numero y_0, l'equazione in x : $ax + by_0 = c$ ha una soluzione $x_0 = \dfrac{c - by_0}{a}$. Dunque, si ha $ax_0 + by_0 = c$.

La retta $\mathcal{R}$ passante per il punto $P_0 \leftrightarrow (x_0 , y_0)$ e parallela alla retta di equazione $ax + by = 0$ è, come abbiamo visto, rappresentata dall'equazione data $ax + by = c$.

3) *Tutte le rette che si ottengono tenendo fissi a e b, e dando valori diversi a c, sono fra loro parallele, essendo tutte parallele ad* $\mathcal{R}'$.

È importante notare che se si moltiplicano a , b , c, nella (8), per uno stesso numero diverso da 0 si ottiene un'equazione che ha le stesse soluzioni e perciò rappresenta la stessa retta: ad esempio, le equazioni $3x + 2y = 1$ e $6x + 4y = 2$ rappresentano la stessa retta.

Se la retta $\mathcal{R}$ non è parallela all'asse $\mathcal{Y}$, la retta $\mathcal{R}'$ può essere scritta nella forma $y' = px'$. Come punto P_0 possiamo prendere il punto di intersezione di $\mathcal{R}$ con l'asse $\mathcal{Y}$: $P_0 \leftrightarrow (0 , q)$; la traslazione t è data da

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - q \end{cases}$$

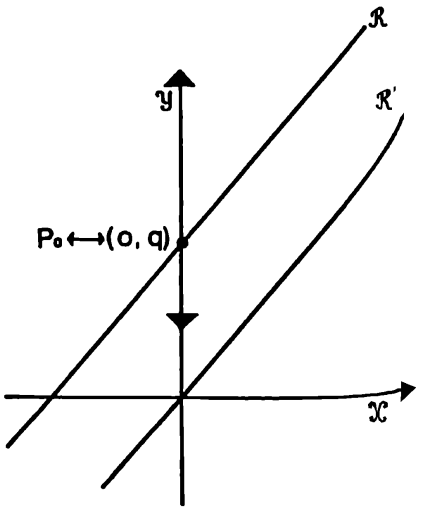


Fig. 5

Allora l'equazione della retta $\mathcal{R}$ si può scrivere $y - q = px$, cioè

$$y = px + q \tag{9}$$

Questa viene detta **forma normale** dell'equazione della retta; il coefficiente p viene sempre detto **pendenza** o **coefficiente angolare**, q è detto **termine costante**. Abbiamo visto che due rette passanti per l'origine coincidono solo se hanno uguale pendenza; perciò due equazioni nella forma (9) rappresentano rette parallele se e soltanto se il coefficiente p è il medesimo. Notiamo poi che non si possono rappresentare nella forma (9) le rette parallele all'asse $\mathcal{Y}$, mentre la (8) permette di rappresentare ogni retta. Per questo motivo la (8) è detta **forma generale** dell'equazione della retta.

Ora ci proponiamo di scrivere l'equazione della retta $\mathcal{R}$ passante per due punti assegnati: $P_0 \leftrightarrow \leftrightarrow (x_0 , y_0)$, $P_1 \leftrightarrow (x_1 , y_1)$. Supponiamo $x_0 \neq x_1$ (nel caso $x_0 = x_1$ non ci sono problemi...).

Eseguiamo la traslazione t che porta P_0 nell'origine. Questa traslazione si esprime ancora così:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

Il punto P_1 va a finire nel punto $Q \leftrightarrow (x_1 - x_0 , y_1 - y_0)$; la retta $\mathcal{R}$ si trasforma nella retta $\mathcal{R}'$ passante per l'origine. La pendenza di $\mathcal{R}'$ è data da

$$p = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

La retta $\mathcal{R}'$ ha dunque l'equazione

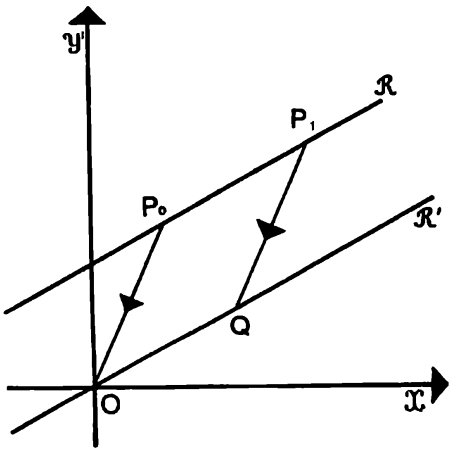


Fig. 6

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Allora, esprimendo x' e y' per mezzo di x ed y, si trova che la retta $\mathcal{R}$ ha l'equazione

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \qquad (10)$$

Lasciamo all'allievo il compito di porre questa equazione nella forma (9) determinando esplicitamente i coefficienti p e q.

Tra poco vedremo un altro modo interessante per ricavare l'equazione della retta passante per due punti.

Aggiungiamo qualche indicazione riguardante la nomenclatura.

Si dice **monomio lineare** un monomio ottenuto moltiplicando una variabile per un numero (che viene detto **coefficiente**). Ad esempio, se x, y, z, u, ... sono le variabili, le seguenti espressioni sono monomi lineari:

$$3x \ , \ -y \ , \ \frac{2}{5} z, \ldots$$

Si dice **polinomio lineare** (o anche **espressione lineare**) una somma di monomi lineari. Ad esempio

$3x - y + \frac{2}{5} z + 2u$ è un polinomio lineare.

Dunque, riesaminando la formula (8), possiamo dire così: l'equazione generale della retta si ottiene uguagliando un polinomio lineare non nullo nelle variabili x, y ad una costante.

Il termine «lineare» richiama appunto l'idea di retta.

Esercizi

1 Scrivere le equazioni delle rette che congiungono le seguenti coppie di punti: $(2,3)$, $(5,7)$; $(-1,2)$, $(2,-1)$; $(4,2)$, $(4,3)$; $(1,1)$, $(5,-2)$.

2 Data la retta $\mathcal{R}$ che passa per i punti $(-3,1)$, $(1,3)$, trovare il punto di $\mathcal{R}$ che ha distanza minima dall'origine. Calcolare questa distanza.

3 Trovare una coppia di numeri (x, y) che sia soluzione dell'equazione $2x - 5y = 6$.

4 Trovare la retta parallela alla retta $3x - 5y = 1$ passante per il punto $(1, 2)$.

5 Un gas è contenuto in un recipiente a pareti fisse; indicando con x la sua temperatura (in gradi centigradi), con y la sua pressione (in atmosfere), si sa che la pressione dipende dalla temperatura secondo una legge del tipo della (9), cioè: $y = a\,x + b$. Alla temperatura di 20° la pressione è di 15,236 atm, alla temperatura di 70° la pressione è di 17,836 atm. Determinare i coefficienti a, b e stabilire per quale valore della temperatura la pressione si annulla (ammettendo che valga sempre la legge).

17.3 Un sistema del tipo

I sistemi lineari

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \qquad (11)$$

in cui i primi membri sono polinomi lineari nelle incognite x ed y, mentre i secondi membri sono numeri assegnati, si dice **sistema lineare** in due equazioni e due incognite. I numeri a, b, a', b' si dicono **coefficienti**; i numeri c, c', **termini noti.**

Noi supporremo che a e b non siano entrambi nulli e, analogamente, che a' e b' non siano en-

trambi nulli. Allora la prima equazione rappresenta una retta $\mathcal{R}$, la seconda una retta $\mathcal{R}'$. Le soluzioni del sistema, cioè le **coppie** (x, y) che verificano entrambe le equazioni, sono le coordinate dei punti di intersezione di $\mathcal{R}$ con $\mathcal{R}'$. Questa traduzione in termini geometrici ci dà subito la chiave del nostro problema. Infatti, date due rette $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$, sappiamo già quali casi possono presentarsi: $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ possono essere *incidenti*, cioè avere un solo punto in comune [il sistema (11) avrà allora un'unica soluzione (x, y)], oppure possono essere *parallele*. Quest'ultimo caso si spezza in due sottocasi, ricordando che abbiamo chiamato parallele non solo le rette prive di punti comuni, ma anche le rette coincidenti: se $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ non hanno punti comuni, ciò significa che il sistema (11) non ha soluzioni; se $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ coincidono, ciò significa che le due equazioni del sistema hanno le stesse soluzioni; allora una delle due può essere senz'altro abolita. In questo ultimo caso, perciò, il sistema ha infinite soluzioni.

Dunque, l'interpretazione geometrica ci fa prevedere facilmente le vicende del nostro sistema lineare; per fare un primo esempio, consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad (12)$$

possiamo ridurre a forma normale le due equazioni; ricaviamo

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y = x \end{cases}$$

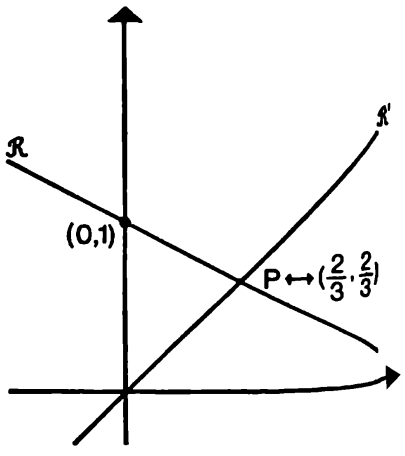


Fig. 7

Queste due equazioni ci rappresentano le rette $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ come grafico, cioè esprimono le ordinate dei

punti delle rette per mezzo delle ascisse. Il punto di intersezione è allora quello per cui le ordinate delle due rette coincidono:

$$-\frac{1}{2}x + 1 = x.$$

da cui

$$\frac{3}{2}x = 1 \quad \text{cioè } x = \frac{2}{3}$$

Dalla seconda equazione si ricava

$$y = x = \frac{2}{3}$$

Dunque la soluzione del sistema è $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. In termini geometrici: il punto di intersezione delle rette $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ è $P \leftrightarrow \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Ora ci proponiamo di studiare i sistemi lineari da un punto di vista strettamente algebrico, nella stessa prospettiva con cui, nel § 10.3, abbiamo studiato le equazioni. *Vogliamo cioè vedere se è possibile passare dal nostro sistema ad un nuovo sistema che abbia esattamente le stesse soluzioni, fino a giungere ad un sistema le cui soluzioni siano del tutto evidenti.* Il problema è allora quello di trasformare un sistema in un altro mediante operazioni che siano « reversibili ».

Le operazioni che servono allo scopo sono le seguenti:

1) *Sommare una stessa quantità ad ambo i membri di un'equazione del sistema.*

2) *Moltiplicare ambo i membri di un'equazione del sistema per uno stesso numero non nullo.*

3) *Sostituire ad un'equazione del sistema un'equazione ottenuta aggiungendo ad essa, membro a membro, un'***altra** *equazione del sistema dopo averla moltiplicata per un numero* **qualsiasi.**

4) *Scambiare fra loro due equazioni.*

Le operazioni 1 e 2 non rappresentano nulla di nuovo: le abbiamo già trovate nello studio delle singole equazioni. Vediamo un esempio relativo all'operazione 3); consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases} \qquad (13)$$

Moltiplichiamo membro a membro la prima equazione per -2 e sommiamo alla seconda; il nuovo sistema è

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ -2x - y = -3 \end{cases} \qquad (14)$$

Evidentemente, questo secondo sistema conserva tutte le soluzioni del precedente perché se una coppia (x, y) rende vere le due uguaglianze (13), rende vere anche le due uguaglianze (14). Ma dal sistema (14) possiamo ritornare al sistema (13) sommando membro a membro alla seconda equazione la prima moltiplicata per 2. (Verificarlo!). Dunque, i due sistemi hanno le stesse soluzioni.

L'operazione 4) non ha bisogno di commento perché l'ordine con cui si scrivono le equazioni (o disequazioni) di un sistema non ha mai rilevanza.

Mediante le operazioni 1), 2), 3), 4) possiamo, con un po' di abilità, semplificare la struttura del sistema. Ad esempio, nel sistema (13) possiamo moltiplicare membro a membro la prima equazione

per $-\frac{4}{3}$ e sommare alla seconda:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ \left(-\frac{8}{3} + 3\right) y = -\frac{8}{3} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ \frac{1}{3} y = -\frac{5}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ y = -5 \end{cases}$$

A questo punto, non resta che sostituire nella prima equazione il valore di y dato dalla seconda. (Si ottiene lo stesso effetto sommando alla prima equazione la seconda moltiplicata per -2):

$$\begin{cases} 3x - 10 = 2 \\ y = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 12 \\ y = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}$$

Dunque il sistema ha come unica soluzione la coppia $(4, -5)$.

Consideriamo ora il sistema

$$\begin{cases} 3x + 6y = 3 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases} \tag{15}$$

Moltiplichiamo la prima equazione per $-\frac{2}{3}$ e sommiamo alla seconda; otteniamo

$$\begin{cases} 3x + 6y = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione è sempre soddisfatta e non pone alcun vincolo: può dunque essere abolita. Il sistema è equivalente alla prima equazione sola. Geometricamente, tutto è chiaro: *le due equazioni del sistema* (15) *rappresentano la stessa retta.*

Infine, consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 3x + 6y = 3 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases} \qquad (16)$$

Moltiplicando la prima equazione per $-\frac{2}{3}$ e sommando alla seconda si ha

$$\begin{cases} 3x + 6y = 3 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

La seconda equazione è una relazione falsa, qualunque siano i valori di x ed y, perciò il sistema (16) non ha soluzioni. *Le due equazioni del sistema* (16) *rappresentano rette parallele prive di punti comuni.* (Verificarlo scrivendo le due equazioni in forma normale).

Possiamo dare un'interpretazione geometrica del procedimento che abbiamo introdotto per la risoluzione dei sistemi lineari. Consideriamo il caso in cui le due rette $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ che rappresentano le equazioni del sistema (11) sono incidenti. Premettiamo una definizione:

Chiamiamo **fascio** con centro Q l'insieme di tutte le rette del piano che passano per Q.

Supponiamo ora che Q sia il punto di intersezione delle due rette $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$, cioè che sia $Q \leftrightarrow (\bar{x} , \bar{y})$, essendo $(\bar{x} , \bar{y})$ l'unica risoluzione del sistema (11). Anzitutto, qual è l'interpretazione geometrica delle operazioni 1), 2), 3), 4) che abbiamo introdotto? Le operazioni 1) e 2), ovviamente, lasciano inalterate le soluzioni dell'equazione a cui si applicano, perciò lasciano inalterata la retta che rappresenta l'equazione. L'operazione 4) non cambia proprio nulla. L'operazione 3) ci dà una nuova retta; poiché il nuovo sistema conserva la stessa soluzione del precedente, la nuova retta passa anch'essa per il punto Q e quindi è una retta dello stesso fascio.

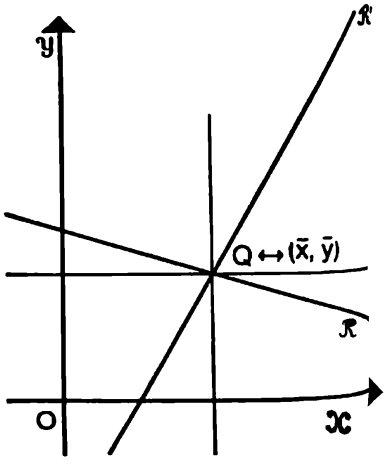


Fig. 8

La tecnica che abbiamo introdotto per la risolu-

zione del sistema lineare consiste allora nel cercare, fra le rette del fascio, la « verticale » (che permette di determinare l'ascissa di Q) oppure l'« orizzontale » (che ci dà l'ordinata di Q).

Applicando in modo sensato le operazioni 1), 2), 3), 4) è possibile compiere uno studio dei sistemi lineari anche con piú di due equazioni e piú di due incognite; limitiamoci a qualche esempio significativo. Consideriamo il sistema, in tre equazioni e tre incognite:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -x + y + 2z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = 1 \end{cases} \qquad (17)$$

Sommiamo membro a membro la prima equazione alla seconda, e poi la prima moltiplicata membro a membro per — 2 alla terza:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3y + 5z = 3 \\ -y - 8z = -1 \end{cases}$$

Ora nella seconda e nella terza equazione non compare piú la x. Sommiamo alla terza equazione la seconda moltiplicata per $\frac{1}{3}$; troviamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3y + 5z = 3 \\ -\frac{19}{3}z = 0 \end{cases}$$

Nella seconda e nella terza equazione non compare piú la x, nella terza non compare piú la y. Il sistema ha assunto una struttura grafica « trian-

golare». Ora è facile risolvere il sistema partendo dall'ultima equazione e risalendo alle precedenti:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3y + 5z = 3 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2 = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Questo metodo della «triangolazione» è molto efficiente e viene usato anche per risolvere sistemi lineari molto complessi. Molti problemi tecnologici, economici ecc. si traducono in sistemi lineari che possono avere anche qualche centinaio di equazioni e di incognite, e che non sarebbero risolubili senza gli elaboratori elettronici.

Ancora un esempio:

$$\begin{cases} 3y + z = 10 \\ 2x - y - z = 0 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

In questo caso ci vuol poco a capire che non si può operare con la prima equazione come nel caso precedente, ma che occorre operare con la seconda o con la terza. Volendo eseguire un programma di calcolo fisso, come è necessario quando il calcolo deve essere eseguito da un elaboratore elettronico, basta prevedere, come operazione preliminare, lo scambio della prima equazione con una delle successive:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3y + z = 10 \\ x + y + z = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3y + z = 10 \\ \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3y + z = 10 \\ y + z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3y + z = 10 \\ z = 1 \end{cases}$$

È facile concludere che la soluzione è $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$.

È stato soprattutto in vista del calcolo automatico che abbiamo voluto elencare esplicitamente l'operazione 4), malgrado il suo carattere ovvio.

Ancora un'osservazione: per i sistemi in due incognite abbiamo trovato una rappresentazione geometrica. Anzi eravamo partiti dalla constatazione che un'equazione lineare in due incognite rappresenta una retta. Che tipo di rappresentazione geometrica possiamo trovare per le equazioni di un sistema come il (17)? E per le equazioni con $3, 4, \ldots, 100, \ldots$ incognite?

Non vogliamo dare risposta a queste domande; dopo avere (speriamo) stuzzicato la curiosità del lettore, lo invitiamo a fare da sé qualche congettura, in attesa di un ulteriore progresso dei suoi studi matematici.

Esercizi

1 Risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ 6x - 3y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Preso un foglio di carta millimetrata, dare una rappresentazione grafica di ciascun sistema; confrontare i risultati (approssimati) ottenuti graficamente con quelli ottenuti con il calcolo esatto.

2 Risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 2{,}001y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + \sqrt{2}y = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}x + y = -\sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x + ay = b \\ -ax + y = c \end{cases}$$

(a, b, c sono numeri assegnati)

3 Un numero di due cifre ha la somma delle cifre uguale ad 8. Scambiando fra loro le cifre si ottiene un numero che supera di 18 il numero assegnato. Trovare questo numero.

4 Un treno parte da Milano verso Bologna e viaggia alla velocità costante di 80 km/h; nello stesso istante un treno proveniente da Bologna e diretto a Milano si trova a 100 km da Milano. Questo secondo treno viaggia alla velocità costante di 120 km/h. Si chiede di dare una rappresentazione grafica del moto dei due treni e di trovare il tempo e il punto in cui i due treni si incontrano.

5 Un celebre problemino è così formulato: in un pollaio ci sono conigli e galline; in tutto ci sono a teste e b zampe. Trovare quanti sono i conigli e quante le galline.
Come devono essere a e b perché il problema abbia una soluzione accettabile?

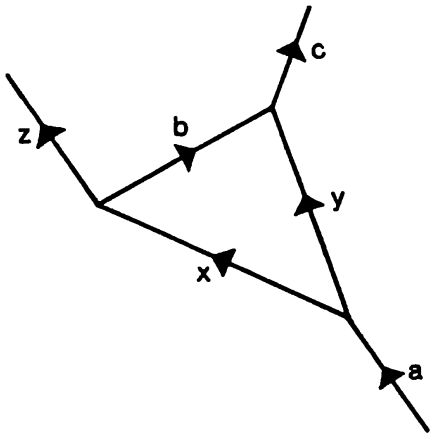
6 Disponendo di un piccolo calcolatore, risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} 3{,}756\,x + 2{,}745\,y = 3{,}532 \\ 4{,}321\,x + 7{,}272\,y = 2{,}082 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1{,}410\,x + 2y = 3{,}750 \\ x + 1{,}144\,y = 2{,}718 \end{cases}$$

(Per non fare errori, è molto importante procedere col massimo ordine).

* **7** Dimostrare che, applicando le operazioni 1), 2), 3), si possono scambiare fra loro le due equazioni di un sistema [pertanto, da un punto di vista puramente teorico, l'operazione 4) potrebbe essere cancellata dal nostro elenco].

8 Una rete stradale ha la forma dello schizzo qui accanto. Le strade sono a senso unico, secondo le frecce, e le automobili non possono sostare. Il numero delle automobili che sono passate in un'ora dai singoli tratti è dato dalle lettere scritte accanto.
Conoscendo a, b, c, è possibile determinare x, y, z?



9 Scomporre il vettore $\boldsymbol{v} \leftrightarrow (5\,,\,4)$ in due vettori aventi le direzioni delle rette: $3x - y = 0$, $x - 2y = 0$.
Eseguire poi il disegno su carta millimetrata e confermare i risultati ottenuti con il calcolo.

10 Risolvere i seguenti sistemi lineari, in tre equazioni e tre incognite:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ -2x + y + z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 2 \\ -x + z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 2 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

11 Far vedere che il sistema in due equazioni e tre incognite

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

ha infinite soluzioni (x, y, z). Possibilmente, descrivere queste soluzioni, in qualche modo.

12 Risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ 3x - y - z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + ay + a^2z = d \\ x + by + b^2z = e \\ x + cy + c^2z = f \end{cases}$$

(a, b, c, d, e, f sono parametri)

13 Dati nel piano tre punti, esistono tre cerchi con centri in essi e tangenti fra loro esternamente?

Analisi di un sistema lineare e formule risolutive

17.4 Ritorniamo sul sistema (11), col proposito di caratterizzare il suo comportamento mediante lo studio dei coefficienti a, b, a', b' e dei termini noti c, c'. È importante ancora una volta la traduzione del nostro problema in forma geometrica. Pensiamo dunque alle due rette $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ che hanno rispettivamente le equazioni

$$ax + by = c \qquad a'x + b'y = c'$$

Supponiamo che a e b non siano entrambi nulli; così pure a' e b'.

Cominciamo col chiederci se le due rette sono incidenti o parallele. Sappiamo che le parallele ad $\mathcal{R}$ e ad $\mathcal{R}'$ rispettivamente, mandate per l'origine O, hanno le equazioni

$$ax + by = 0 \qquad a'x + b'y = 0 \qquad (18)$$

Allora $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ sono parallele quando e solamente quando queste due rette coincidono.

Per decidere quando le rette (18) coincidono si può fare così: si prende un punto Q, diverso da O, della seconda retta e si vede se sta sulla prima. Si ve-

rifica subito che il punto $Q \leftrightarrow (b', -a')$ sta sulla seconda retta; infatti è $a'b' - b'a' = 0$.

Il punto Q sta sulla prima retta se e solo se è verificata la seguente uguaglianza ottenuta sostituendo la coppia $(b', -a')$ nella prima delle (18):

$$ab' - a'b = 0 \qquad (19)$$

Questa è allora la relazione che traduce il parallelismo di $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$. Ora vogliamo mettere questa relazione in una forma piú espressiva. Supponiamo che sia $a \neq 0$; chiamiamo h il rapporto $\frac{a'}{a}$. La relazione (19) , dividendo per a , ci dà

$$b' = \frac{a'}{a}\, b = hb$$

Allora, se vale la (19), esiste un numero h tale che

$$a' = ha \ , \ b' = hb \qquad (20)$$

Abbiamo supposto $a \neq 0$; ma se è $a = 0$ siamo certi che è $b \neq 0$; allora, ponendo $\frac{b'}{b} = h$, otteniamo come prima le relazioni (20) partendo dalla (19).

Inversamente, se esiste un h tale che valgano le (20), vale la (19), come si vede subito sostituendo i valori di a' e di b'.

Notiamo poi che il numero h per cui valgono le (20) non può essere nullo, perché a' e b' non sono entrambi nulli.

Dunque, *le rette* $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ *rappresentate dalle equazioni del sistema* (11), *sono parallele se e soltanto se valgono*

le (20) *cioè i coefficienti* a, a' e b, b' *sono proporzionali.*

Nel caso che $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ siano parallele, resta da distinguere se sono coincidenti oppure disgiunte.

Tenendo conto delle relazioni (20) l'equazione di $\mathcal{R}'$ può essere scritta $hax + hby = c'$; dividendo per il numero $h \neq 0$ si ottiene

$$ax + by = \frac{c'}{h}$$

Confrontando questa equazione con la prima delle (11), che è l'equazione di $\mathcal{R}$, si ha che le due equazioni coincidono se è $c = \frac{c'}{h}$, cioè $c' = hc$, altrimenti sono incompatibili, e non hanno alcuna soluzione.

Concludendo:

Se esiste un numero h *tale che*

$$a' = ha \quad , \quad b' = hb \quad , \quad c' = hc$$

le rette $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ *coincidono* [*in altre parole: il sistema* (11) *equivale alla prima equazione sola; la seconda può essere soppressa.* Esso ha dunque infinite soluzioni].

Se esiste un numero h *tale che valgono le* (20), *ma risulta* $c' \neq hc$, *le rette* $\mathcal{R}$ *ed* $\mathcal{R}'$ *sono parallele e disgiunte* [*il sistema* (11) *non ha alcuna soluzione*]. Ritorniamo alla (19); poiché essa caratterizza il parallelismo di $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$, la sua negazione, cioè

$$ab' - a'b \neq 0 \qquad (21)$$

caratterizza il fatto che $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ sono *incidenti* [e il sistema (11) ha un'unica soluzione]. In questa situazione, ci proponiamo di scrivere una formula che rappresenti la soluzione del nostro sistema. Moltiplichiamo la prima delle (11) per b', la seconda per $-b$:

$$\begin{cases} ab'x + bb'y = cb' \\ -a'bx - bb'y = -c'b \end{cases}$$

Sommando membro a membro, abbiamo

$$(ab' - a'b)\,x = cb' - c'b$$

Qui risulta calzante l'ipotesi (21), che ci permette di ricavare il valore di x:

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} \tag{22}$$

In modo analogo, possiamo eliminare la x e ricavare la y; moltiplichiamo la prima equazione del sistema (11) per $-a'$, la seconda per a:

$$\begin{cases} -aa'x - a'by = -a'c \\ aa'x + ab'y = ac' \end{cases}$$

Sommando membro a membro, otteniamo

$$(ab' - a'b)\,y = ac' - a'c$$

da cui, dividendo ancora per $ab' - a'b \neq 0$,

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \tag{23}$$

La coppia (x, y) data dalle (22) e (23) rappresenta

l'unica soluzione del sistema (11). Infatti, noi sappiamo già che esiste una ed una sola soluzione (le rette $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ sono incidenti!): le (22) e (23), che abbiamo dedotto dal sistema (11) ci danno l'unica espressione possibile di quella soluzione.

Il metodo che abbiamo applicato ora coincide sostanzialmente con quello introdotto nel § precedente; solamente, sapendo già che c'è una soluzione, siamo esonerati dal procedere in modo da ottenere, ad ogni passo, un sistema equivalente a quello assegnato. Ci basta constatare che il sistema ottenuto alla fine [cioè il sistema delle (22) e (23)] ha un'unica soluzione.

Per ricordare la soluzione, espressa dalla (22) e dalla (23), si può procedere in questo modo. Indichiamo con il simbolo

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

il polinomio $ab' - a'b$, che si può considerare ottenuto dalla **matrice**

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$$

(nel cap. 4 abbiamo convenuto di chiamare matrice un quadro di elementi disposti in righe e colonne) con questo procedimento: si moltiplicano i due elementi a, b' che si trovano sulla diagonale «discendente» ($\searrow$); si moltiplicano i due elementi a', b che si trovano sulla diagonale «ascendente» ($\nearrow$) e si aggiunge al primo prodotto l'opposto del secondo. Il polinomio $ab' - a'b$ si dice **determinante** della matrice. Con queste convenzioni, la (22) e la (23), che esprimono la soluzione del sistema (11), si possono scrivere così:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \tag{24}$$

Come applicazione, vogliamo trovare con un nuovo metodo l'equazione della retta che passa per i punti $P_0 \leftrightarrow (x_0 , y_0)$, $P_1 \leftrightarrow (x_1 , y_1)$; supponiamo $x_0 \neq x_1$ e proponiamoci di trovare l'equazione della retta in forma normale (siamo certi che la retta non è parallela all'asse $\mathfrak{y}$, essendo $x_0 \neq x_1$). La retta è dunque rappresentata da un'equazione

$$y = px + q$$

dove p e q *sono gli elementi incogniti.* Il passaggio per i punti P_1 e P_0 si traduce nel fatto che valgono le relazioni

$$\begin{cases} px_1 + q = y_1 \\ px_0 + q = y_0 \end{cases}$$

Si tratta di risolvere questo sistema nelle incognite p , q . La soluzione è:

$$p = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$q = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}$$

e deve coincidere, naturalmente, con quella che abbiamo trovato alla fine del § 17.2.

Esercizi

1 Risolvere i seguenti sistemi lineari, nelle incognite x, y, contenenti parametri: λ, μ, ...:

$$\begin{cases} x + \lambda y = \lambda \\ -\lambda x + y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} = 1 \\ \lambda x - \mu y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} (1 + \lambda) x + y = 1 \\ x + (1 - \lambda) y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda x + 2y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

* **2** Dato nel piano un riferimento cartesiano, consideriamo la seguente applicazione $P \to P'$ del piano in sé definita per mezzo delle coordinate di P e di P' [$P \leftrightarrow (x, y)$, $P' \leftrightarrow (x', y')$]:

$$\begin{cases} ax + by = x' \\ a'x + b'y = y' \end{cases}$$

dove a, b, a', b' sono numeri reali assegnati. In quali casi questa applicazione è bigettiva? Trovare l'espressione dell'applicazione inversa. Dimostrare che l'applicazione assegnata, nel caso che sia bigettiva, trasforma rette in rette.

* **3** Dati nel piano cartesiano i punti $P \leftrightarrow (a, b)$, $P' \leftrightarrow (a', b')$, dimostrare che l'area del parallelogrammo che ha come vertici consecutivi i punti P', O, P, $Q \leftrightarrow (a + a', b + b')$ è data da $|ab' - a'b|$.
[Si tratta di fare qualche calcolo; si può prendere come base del parallelogrammo il segmento (O, P); l'altezza si otterrà intersecando la retta $P'Q$ con la perpendicolare alla retta OP passante per l'origine].

* **4** Verificare che i valori di x ed y dati dalle (22), (23) rimangono inalterati se si scambia a con a', b con b', c con c' (infatti, ciò significa scambiare la prima equazione con la seconda!).
Verificare ancora che le formule (22), (23) rimangono vere se si scambiano a con b, a' con b', x con y. (Anche questo è ovvio: il cambiamento esprime un semplice scambio dell'ordine con cui si scrivono i termini dell'equazione: $by + ax$, in luogo di $ax + by$ ...).

* **5** Considerare il sistema lineare:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx + ay = c \end{cases}$$

con $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$. È possibile, dopo avere osservato il sistema, scrivere la soluzione senza far calcoli?

17.5 Dopo avere trovato una rappresentazione geometrica per le equazioni lineari in due incognite, ci poniamo un problema analogo riguardo

Disequazioni nel piano cartesiano

alle **disequazioni**. Ci domandiamo anzitutto: data la disequazione

$$ax + by > c \tag{25}$$

dove i coefficienti a e b non sono entrambi nulli, come si rappresentano le sue soluzioni nel piano cartesiano? Si tratta di vedere in quale insieme di punti la funzione lineare

$$(x\,,\,y) \leftrightarrow ax + by \tag{26}$$

ha un valore maggiore della costante c assegnata. Cominciamo a chiederci: com'è fatto l'insieme dei punti $P \leftrightarrow (x\,,\,y)$ su cui la funzione lineare (26) assume un valore costante k? Si tratta dei punti $P \leftrightarrow (x\,,\,y)$ tali che

$$ax + by = k \tag{27}$$

Questa equazione rappresenta una retta; se facciamo variare k otteniamo una famiglia di rette *tutte parallele fra loro*. Tenendo presente la disequazione (25) assegnata, consideriamo la retta

$$\mathcal{R} \leftrightarrow ax + by = c$$

Allora, fra le rette della famiglia (27) possiamo distinguere tre categorie:

le rette per cui è $k > c$: i punti di tutte queste rette ci danno le soluzioni della disequazione (25);

la retta $\mathcal{R}$, per cui è $k = c$;

le rette per cui è $k < c$: i punti di tutte queste ci danno le soluzioni della disequazione $ax + by < c$.

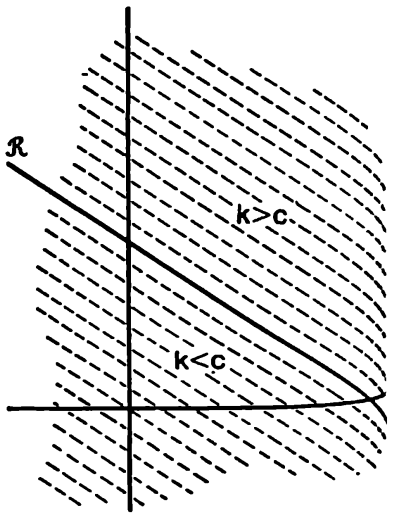


Fig. 9

Si capisce subito che *le rette della prima categoria ricoprono uno dei due semipiani generati da* $\mathfrak{R}$; *così pure le rette della terza categoria.* Per rendercene conto con chiarezza, vediamo come le rette della nostra famiglia intersecano uno degli assi cartesiani. Supponiamo, ad esempio, che sia $b > 0$: così le rette sono tutte incidenti all'asse $\mathfrak{y}$; il punto di intersezione ha ordinata $y = \frac{k}{b}$. Allora, essendo $k > c$ e perciò $\frac{k}{b} > \frac{c}{b}$, le rette della prima categoria tagliano l'asse $\mathfrak{y}$ nei punti della *semiretta* $y > \frac{c}{b}$, le rette della terza categoria tagliano l'asse $\mathfrak{y}$ nei punti della *semiretta* $y < \frac{c}{b}$ (essendo ora $k < c$). È chiaro allora che le rette della prima categoria ricoprono tutto il *semipiano* che sta « al di sopra » della retta $\mathfrak{R}$, mentre le rette della terza categoria ricoprono tutto il *semipiano* che sta «al di sotto » della retta $\mathfrak{R}$.

Se è $b < 0$ le parti dei due semipiani si scambiano: le soluzioni della (25) ricoprono tutto il semipiano «al di sotto » di $\mathfrak{R}$, le soluzioni della disequazione $ax + by < c$ ricoprono tutto il semipiano « al di sopra » di $\mathfrak{R}$. Nel caso $b = 0$, la disequazione (25) diventa $ax > c$; le soluzioni sono rappresentate da uno dei due semipiani generati dalla retta $ax = c$. Dunque, in ogni caso, *le soluzioni di una disequazione lineare in due variabili:* $ax + by > c$ *sono rappresentate da uno dei due semipiani originati dalla retta* $\mathfrak{R} \leftrightarrow ax + by = c$.

In pratica, una volta rappresentata questa retta, c'è solo da decidere quale dei due semipiani rappresenta le soluzioni della (25); non c'è bisogno di rifare le considerazioni dettagliate che abbiamo fatto sopra: basta prendere un punto fuori della retta $\mathfrak{R}$ e vedere se soddisfa alla disequazione o alla disequazione opposta. Ad esempio, consideriamo la disequazione $2x - y > -1$; rappresen-

tiamo la retta $2x - y = -1$. Sostituendo le coordinate dell'origine: (0 , 0), si ha $0 > -1$, dunque la disequazione è verificata. Si conclude che il semipiano che rappresenta le soluzioni della disequazione è il semipiano che contiene l'origine.

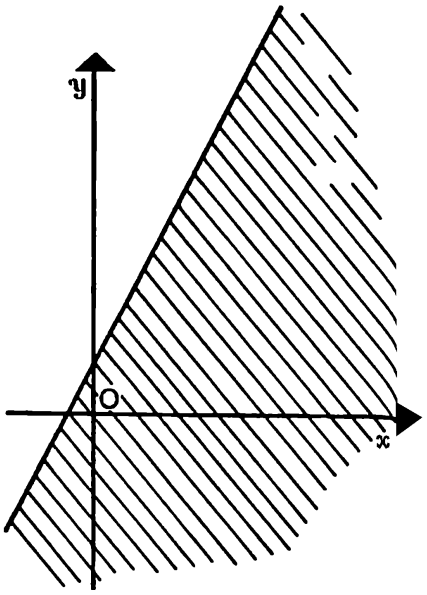


Fig. 10

Finora abbiamo considerato sempre disequazioni lineari in cui compare il segno di disuguaglianza forte: $>$. È facile trovare la rappresentazione delle soluzioni di una disuguaglianza debole; consideriamo, ad esempio, la disuguaglianza $ax + by \geqslant c$. L'insieme delle soluzioni è dato dall'unione dell'insieme delle soluzioni della disuguaglianza forte $ax + by > c$ con l'insieme delle soluzioni dell'equazione $ax + by = c$. Si tratta allora di aggiungere ai punti del semipiano i punti della retta che gli fa da frontiera.

Domandiamoci ora: come si possono rappresentare nel piano cartesiano le soluzioni di un *sistema di disequazioni lineari?*

È evidente (ed è stato già osservato nel § 10.4) che le soluzioni di un sistema sono l'*intersezione* delle soluzioni delle disequazioni che lo compongono. A questo punto, ci è utile quanto abbiamo appreso nel § 13.5 riguardo all'intersezione di piú semipiani: sappiamo che si tratta in ogni caso di una figura convessa (dal momento che l'intersezione di insiemi convessi è un insieme convesso). In molti casi essa potrà risultare un *poligono convesso.*

L'interesse delle disequazioni e dei sistemi di disequazioni sta soprattutto nella grande quantità di problemi pratici a cui esse possono applicarsi. Vale dunque la pena di vedere qualche esempio significativo.

Esempio 1. *Un'agenzia di commercio tratta due merci A e B; per ogni unità della merce A essa ottiene un guadagno a, per ogni unità della merce B ottiene un*

guadagno b; le spese fisse che l'agenzia deve sostenere ogni anno ammontano a c. Quali quantitativi delle merci A e B deve trattare ogni anno l'agenzia per poter realizzare un utile?

Dette x ed y le quantità di merci A e B (rispettivamente) trattate ogni anno, il guadagno complessivo è di $ax + by$. L'agenzia realizza un utile se si ha

$$ax + by > c$$

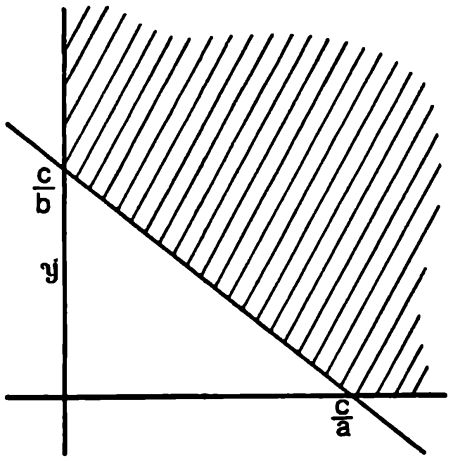


Fig. 11

In questo caso, poi, interessano solo i punti del piano cartesiano per cui è $x \geq 0$, $y \geq 0$, cioè i punti del primo quadrante. Le soluzioni sono date dalla regione tratteggiata in figura. Facciamo un'osservazione di carattere generale: la frase «risolvere un'equazione» (o una disequazione) ha un significato piuttosto vago perché molti sono i modi con cui si possono mettere in evidenza le soluzioni. *In questo § noi intendiamo mettere in evidenza le soluzioni attraverso la loro rappresentazione sul piano cartesiano.* Non c'è dubbio che questa rappresentazione, per le suggestioni di carattere visivo che induce, è di grande importanza e utilità.

Esempio 2. *La fornitura di energia elettrica ai privati può essere fatta secondo una delle due seguenti tariffe, a scelta dell'utente:*

I (*Tariffa binomia*): L 20 *al* kWh (*kilowattora*) *per la «forza motrice» e* L 50 *al* kWh *per l'illuminazione, oltre a* L 4000 *al trimestre come quota fissa.*

II (*Tariffa promiscua*): L 30 *al* kWh, *senza distinzione di tipo di consumo, oltre a* L 2000 *al trimestre come quota fissa.*

Quale tariffa è piú conveniente?

Naturalmente, la risposta dipende dal consumo trimestrale di energia elettrica. Supponiamo che:

x indichi il consumo trimestrale di energia elettrica per «forza motrice» (in kWh).

y indichi il consumo trimestrale per illuminazione.

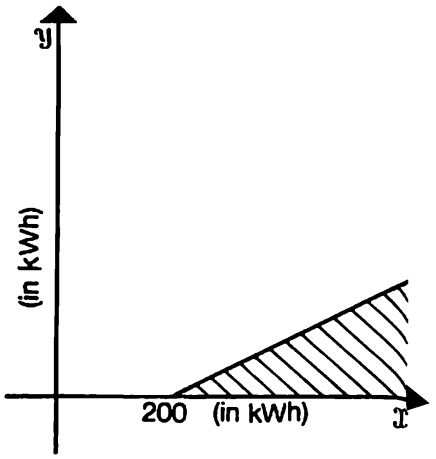


Fig. 12

La spesa nel caso della prima tariffa è

$$20x + 50y + 4000$$

nel caso della seconda è

$$30\ (x + y) + 2000$$

La prima tariffa risulta piú conveniente se è

$$20x + 50y + 4000 < 30x + 30y + 2000$$

cioè

$$10x - 20y > 2000$$

da cui, semplificando,

$$x - 2y > 200$$

La regione di maggior convenienza per la tariffa binomia è quella indicata con il tratteggio nella rappresentazione grafica. La retta $x - 2y = 200$ rappresenta invece le situazioni in cui le due tariffe sono ugualmente convenienti, cioè comportano la stessa spesa.

Esempio 3. *Un'industria chimica può contare su un rifornimento mensile di non piú di* 1000 *tonnellate di petrolio e non piú di* 1000 *tonnellate di carbone. Essa può produrre due merci: A e B. Per ogni tonnellata di A sono necessarie* 1 *tonnellata di petrolio e* 2 *di carbone; per ogni tonnellata del prodotto B sono necessarie* 3 *tonnellate di petrolio e* 2 *di carbone.*

Rappresentare graficamente le quantità di A e di B che l'industria può produrre.

Sapendo che per ogni tonnellata di A si ottiene un guadagno di L 30 000 *e per ogni tonnellata di B si ottiene un guadagno di* L 50 000, *trovare, sempre appoggiandosi al disegno, il tipo di produzione per cui il guadagno è massimo.*

Indichiamo con x ed y, rispettivamente, le quantità di A e di B che si producono. Allora devono valere le due disequazioni:

$$\begin{cases} x + 3y \leqslant 1000 \\ 2x + 2y \leqslant 1000 \end{cases} \qquad (28)$$

La prima ci dice che la quantità di petrolio consumata non può superare le 1000 t, la seconda ci dice che la quantità di carbone consumata non può superare le 1000 t; è poi evidente che deve essere $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

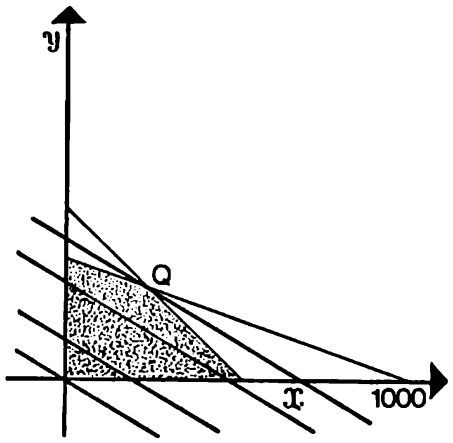


Fig. 13

I tipi di produzione possibili sono rappresentati in figura dalla regione tratteggiata.

Veniamo ora alla seconda domanda; il guadagno che si ottiene con la produzione di x tonnellate di A ed y tonnellate di B è dato, in kilolire* (cioè in migliaia di lire; in simboli: K£) da

$$30x + 50y$$

* L'inflazione ci costringe ad adottare unità di misura piú grandi per evitare di scrivere numeracci anche per somme modeste.

Come abbiamo visto all'inizio di questo paragrafo, l'insieme delle coppie (x, y) a cui corrisponde un fissato guadagno g è dato dalla retta $30x + 50y = g$. Al variare di g, si ha una famiglia di rette fra loro parallele; le rette che ci interessano sono quelle che intersecano la regione tratteggiata, dal momento che solo i punti di questa regione corrispondono a tipi di produzione effettivamente possibili. Notiamo poi che al crescere di g cresce l'ordinata del punto di intersezione della retta $30x + 50y = g$ con l'asse y.

Dunque:

per avere il valore massimo di g occorre cercare la retta della famiglia $30x + 50y = g$ che tocca la regione tratteggiata e che stacca sull'asse y il punto di ordinata massima.

A questo punto, è bene farci guidare dal disegno: si vede che la retta cercata è quella che passa per il punto Q, intersezione delle due rette $x + 3y = 1000$ e $2x + 2y = 1000$. Risolvendo questo sistema si ricava $x = y = 250$. Si conclude che il guadagno massimo realizzabile per ogni mese di attività è dato da $30 \cdot 250 + 50 \cdot 250 = 20\,000$ K£, cioè 20 milioni di lire.

La tecnica di calcolo che conduce a risolvere problemi come questo, in cui si cercano i massimi o i minimi di una funzione lineare, con la condizione che valgano una o piú disequazioni lineari, è chiamata **programmazione lineare**. Le disequazioni che devono essere soddisfatte [come le (28)] si chiamano **vincoli**, la funzione da rendere massima o minima [nel nostro caso la $(x, y) \to 30x + 50y$] si chiama **funzione di scopo**. La programmazione lineare è sorta all'epoca della seconda guerra mondiale ed è stata poi applicata ad un gran numero di problemi di carattere economico. L'attuazione della programmazione lineare è stata resa possibile dall'avvento dei calcolatori elettronici; infatti, solo con i calcolatori elettronici si può venire a capo di problemi in cui

intervengono centinaia o anche migliaia di vincoli, con centinaia o migliaia di variabili.

Naturalmente, in molti casi interessanti non basta piú limitarsi a funzioni lineari (sia per i vincoli che per la funzione di scopo). Si parla allora di **programmazione non lineare**. Insomma, la matematica mette a disposizione dell'uomo di oggi mezzi potentissimi per affrontare razionalmente i suoi problemi economici.

Tutto sta nel vedere se l'uomo stesso vuole comportarsi razionalmente...

Vediamo ora un altro piccolo problema di programmazione lineare.

Esempio 4. *Un produttore ha due depositi nei quali si trovano, rispettivamente,* 4000 *tonnellate e* 6000 *tonnellate di combustibile. Egli deve consegnare a due clienti, A e B, due partite di* 3000 *tonnellate e* 5000 *tonnellate rispettivamente. I costi di trasporto sono i seguenti:*

2 Kℓ (kilolire)	*la tonnellata dal I deposito al cliente A*
3 Kℓ	*la tonnellata dal I deposito al cliente B*
5 Kℓ	*la tonnellata dal II deposito al cliente A*
4 Kℓ	*la tonnellata dal II deposito al cliente B*

Si domanda come deve essere fatto il prelievo del combustibile perché il costo del trasporto sia minimo.

Indichiamo con x (in tonnellate) la quantità inviata dal I deposito al cliente *A*.

Indichiamo con y (in tonnellate) la quantità inviata dal I deposito al cliente *B*.

Indichiamo con u (in tonnellate) la quantità inviata dal II deposito al cliente *A*.

Indichiamo con v (in tonnellate) la quantità inviata dal II deposito al cliente B.

I vincoli sono i seguenti:

$$\begin{cases} x + y \leqslant 4000 & \text{(dal I deposito non si può prelevare piú di 4000 t)} \\ u + v \leqslant 6000 & \text{(dal II deposito non si può prelevare piú di 6000 t)} \\ x + u = 3000 & \text{(si deve dare al cliente } A \text{ quanto ha chiesto)} \\ y + v = 5000 & \text{(idem per il cliente } B\text{,} \end{cases}$$

Inoltre, deve essere ovviamente $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$.

Dal terzo e dal quarto vincolo ricaviamo

$$u = 3000 - x \ , \ v = 5000 - y$$

Sostituendo nella seconda equazione si ricava

$$3000 - x + 5000 - y \leqslant 6000$$

che si può scrivere

$$2000 \leqslant x + y$$

Ma si deve ricordare che deve essere $0 \leqslant u$, $0 \leqslant v$, cioè $3000 - x \geqslant 0$, $5000 - y \geqslant 0$, da cui si ricava $x \leqslant 3000$, $y \leqslant 5000$.

Prendendo come variabili x ed y (dal momento che u e v sono subito note, una volta che lo siano x ed y) si ha questo nuovo sistema di vincoli:

$$\begin{cases} x + y \leqslant 4000 \\ x + y \geqslant 2000 \\ x \leqslant 3000 \\ y \leqslant 5000 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Notiamo però che la disequazione $y \leqslant 5000$ si può tralasciare, essendo una conseguenza della prima e della quinta.

Facciamo una rappresentazione grafica nel piano cartesiano: la regione M è quella che ci interessa. Valutiamo ora il costo c del trasporto; si ha (in Kč)

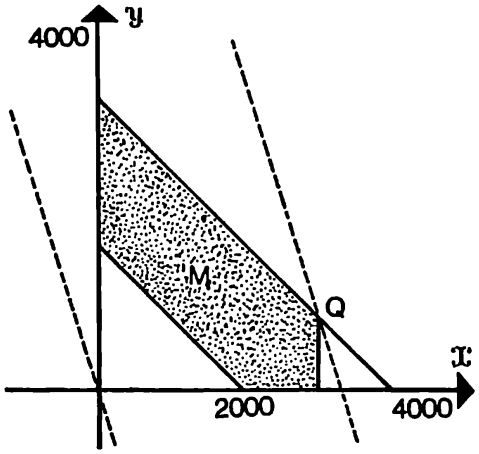


Fig. 14

$$c = 2x + 3y + 5u + 4v$$

cioè

$$c = 2x + 3y + 5\,(3000 - x) + 4\,(5000 - y) =$$

$$= -3x - y + 35\,000$$

Il costo c è minimo quando l'espressione $3x + y$ è massima. Si tratta allora di scegliere, fra tutte le rette parallele alla retta $3x + y = 0$ quella che passa per qualche punto della regione M e che taglia l'asse y nel punto di maggiore ordinata. Il disegno ci dice che questa retta è la retta che passa per il punto Q, intersezione delle rette $x = 3000$ e $x + y = 4000$.

Dunque il minimo costo si ha per:

$$x = 3000 \;,\; y = 4000 - x = 1000 \;,\; u = 0 \;,$$

$$v = 5000 - y = 4000$$

ed è data da

$$c_{min} = -3 \cdot 3000 - 1000 + 35\,000 =$$

$$= 25\,000 \text{ Kč}$$

cioè 25 milioni.

In un caso semplice come quello trattato, sarebbe stato facile ottenere la soluzione con un po' di buon senso, e quasi senza calcoli. Ma non appena il problema diventa piú complicato, il buon senso non basta e occorre fare ricorso ad una completa trattazione matematica.

Esercizi

1 Rappresentare graficamente le soluzioni dei seguenti sistemi di disequazioni:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2x - 3y \leqslant 12 \\ y \leqslant 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y \geqslant 1 \\ -x + y \geqslant 1 \\ y \geqslant 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y \leqslant 6 \\ y + 2x \leqslant 10 \\ x \leqslant 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y \leqslant 1 \\ 2x + 1 \geqslant y \\ 2y + 1 \geqslant x \end{cases}$$

2 Dati nel piano cartesiano due punti $P \leftrightarrow (x_1, y_1)$, $Q \leftrightarrow (x_2, y_2)$ verificare analiticamente che l'insieme dei punti piú vicini a P che a Q è un semipiano. [Esprimere in forma cartesiana la distanza di un punto $A \leftrightarrow (x, y)$ da P e da Q . . .].

3 Ritorniamo all'esempio 2. Supponiamo che, per un certo utente, il consumo dell'energia elettrica per «forza motrice» sia triplo di quello per illuminazione A partire da quale consumo trimestrale risulta piú conveniente la tariffa I? (Fare anche un grafico, completando la figura).

* **4** Ritornare sull'esempio 3; lasciando invariati tutti gli altri dati, supporre che il guadagno sia di L 10 000 per ogni tonnellata della merce A e di L 60 000 per ogni tonnellata della merce B. Quale è il tipo di produzione piú conveniente? In generale, dare la risposta supponendo che i guadagni per tonnellata siano a e b ($a > 0$, $b > 0$).

* **5** Ritornare all'esempio 4 e cercare una soluzione in termini di buon senso. (Verificando poi che coincida con quella calcolata!).

6 Una ditta costruttrice di automobili ha disponibili 900 q di metallo con il quale costruire auto di tipo economico e vetture di lusso; ogni automobile di lusso richiede 2 q di metallo e 200 ore lavorative, mentre ogni auto economica richiede 4 q di metallo, 60 ore lavorative. Si dispone di 60 000 ore lavorative. Se il guadagno per ogni auto di lusso è di L 400 000 e per ogni auto economica di L 150 000, quante vetture di ciascun tipo deve produrre la ditta per realizzare il massimo guadagno?

17.6 In questo paragrafo, a mo' di conclusione, ci occuperemo di vari problemi interessanti che hanno un aspetto comune: quello di coinvolgere

Nel mondo lineare

funzioni lineari e loro rappresentazioni cartesiane. Teniamo presente che, nell'uso corrente, il termine « lineare » viene impiegato non solo (come abbiamo fatto finora) per indicare una funzione somma di monomi lineari, ma anche una funzione somma di monomi lineari e di un termine costante come, ad esempio, la funzione $x \longrightarrow px + q$ che compare a secondo membro nell'equazione della retta in forma normale. Accettiamo dunque questo allargamento di significato; eventualmente, volendo conservare il primo significato, parleremo di funzione lineare **omogenea.**

Problema 1: *conduzione del calore attraverso una parete. Consideriamo una parete di una casa, dello spessore di* 30 *cm, costruita con materiale omogeneo. Supponiamo che la temperatura esterna sia costantemente di* 5° *e la temperatura interna di* 20°. *Si chiede qual è la temperatura nei punti interni della parete.*

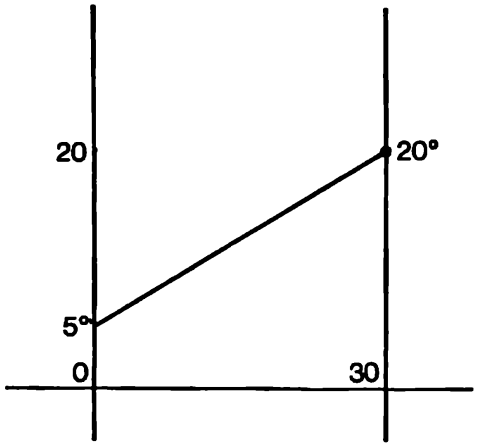


Fig. 15

Si sa dalla fisica che la temperatura nei punti interni alla parete è una funzione lineare della distanza del punto dalla superficie esterna (o interna) della parete. Prendiamo una coppia di assi cartesiani; sull'asse $\mathfrak{X}$ riportiamo le distanze dei punti dalla superficie esterna, in modo che alla superficie interna venga assegnata l'ascissa 30. Sull'asse $\mathfrak{Y}$ riportiamo le temperature corrispondenti. Si tratta dunque di cercare una funzione f lineare tale che $f(0) = 5$, $f(30) = 20$; geometricamente: si deve tracciare la retta che passa per i punti $(0 , 5)$, $(30 , 20)$.

Si ha subito

$$y = \frac{15}{30} x + 5 \quad , \quad \text{cioè} \quad y = \frac{1}{2} x + 5$$

Questa equazione fornisce la temperatura per ogni punto della parete.

Problema 2. *Un appartamento ha un impianto di riscaldamento comandato da un termostato. Quando il bruciatore è in azione, la temperatura aumenta di due gradi ogni ora, quando il bruciatore non è in azione la temperatura diminuisce di un grado all'ora. Il termostato è fissato sui* 20°: *esso inserisce il bruciatore quando la temperatura scende di un grado (cioè tocca i* 19°) *e lo stacca quando è di un grado al di sopra (cioè tocca i* 21°). *Qual è l'andamento della temperatura, sapendo che inizialmente essa è di* 20° *e il bruciatore non funziona?*

L'andamento della temperatura è reso evidente dal grafico. Inizialmente, c'è un intervallo di tempo in cui la temperatura decresce con andamento lineare, poi si inserisce il bruciatore e la temperatura cresce con andamento lineare. Un andamento come questo si dice *lineare a tratti* perché è descritto da varie funzioni lineari: una prima nell'intervallo [0 , 1], una seconda nell'intervallo [1 , 2] , una terza nell'intervallo [2 , 4] ecc. Si trova anche che l'andamento è periodico, cioè si riproduce tale quale dopo un tempo T, che viene detto **periodo**. Quale è il periodo nel nostro caso?

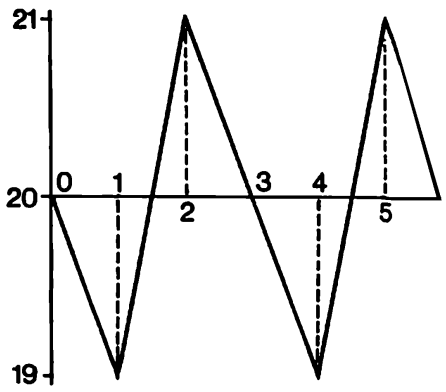


Fig. 16

Problema 3. *Per attraversare un deserto largo* 1000 *km si hanno a disposizione due autocarri che hanno una autonomia massima di* 800 *km. Si pensa allora di seguire questo piano: i due autocarri partono assieme. Arrivati ad una certa distanza* x, *uno cede all'altro tutto il carburante che gli avanza, tranne la quantità che gli serve per ritornare alla base, mentre l'altro prosegue e attraversa il deserto. Come deve essere* x *perché questo sia possibile?*

Evidentemente, l'autocarro che ritorna alla base ha bisogno di carburante per $2x$ km (tenendo conto anche del viaggio di ritorno) e perciò può cedere all'altro una quantità di carburante corrispondente a $800 - 2x$ km.

Devono allora valere le seguenti disequazioni:

$$\begin{cases}(800 - 2x) + 800 \geqslant 1000 \\ x \geqslant 800 - 2x\end{cases}$$

La seconda disequazione dice che l'autocarro destinato alla traversata, nei limiti della sua portata, è effettivamente in grado di caricare il carburante che gli cede l'altro.

Si ricava subito dalle disequazioni:

$$\begin{cases}600 \geq 2x \\ 3x \geq 800\end{cases}$$

da cui

$$\frac{800}{3} \leq x \leq 300$$

Dunque il problema è risolubile, essendo $\frac{800}{3} = 266{,}6\ldots < 300$.

Generalizziamo ora il nostro problema: sia y l'autonomia degli autocarri e domandiamoci qual è il valore minimo di y per cui il nostro problema ha soluzione? (mantenendo sempre fissa la larghezza del deserto).

Si avrà, in analogia a quanto visto prima:

$$\begin{cases}(y - 2x) + y \geqslant 1000 \\ 3x - y \geqslant 0\end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases}y - x \geqslant 500 \\ 3x - y \geqslant 0\end{cases}$$

La regione tratteggiata rappresenta le coppie (x, y) per cui il problema ha soluzione. In particolare, possiamo chiederci qual è la minima autonomia per cui la traversata del deserto è possibile. Si tratta di vedere qual è la minima ordinata y dei punti della regione tratteggiata: evidentemente è l'ordinata del punto Q intersezione delle due rette:

$$y - x = 500 \quad , \quad 3x - y = 0$$

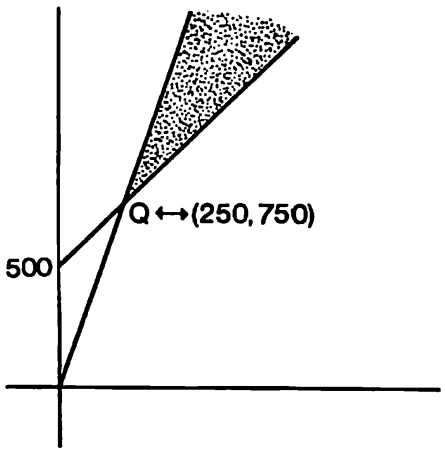


Fig. 17

Risolvendo questo sistema si ha $x = 250$, $y = 750$. Dunque la minima autonomia che consente di realizzare questo piano è di 750 km.

Problema 4. *Gli allievi di un corso annuale di specializzazione, se vengono bocciati, ripetono il corso; però dopo averlo ripetuto per due volte, non possono frequentarlo nuovamente.*

Un'indagine ha rivelato che, fra gli alunni frequentanti, il 20 % *è costituito da ripetenti del* 1° *anno e il* 5 % *da ripetenti del* 2° *anno. Si suppone che il numero degli allievi e le percentuali dei bocciati siano costanti nel tempo.*

Si chiede qual è, fra gli allievi che si iscrivono, la percentuale di coloro che vengono bocciati almeno una volta, la percentuale di quelli che vengono bocciati per due volte. Si chiede inoltre quale è la percentuale di bocciati fra gli allievi che sono stati già bocciati una volta.

Sia a il numero degli allievi che si iscrivono ogni anno per la prima volta, p la percentuale dei bocciati almeno una volta, q la percentuale di quelli che sono bocciati per una seconda volta (percentuali sempre riferite agli allievi che si iscrivono).

Il numero degli allievi frequentanti è dato da:

$$a + ap + aq$$

dove a indica, evidentemente, il numero dei nuovi iscritti, ap il numero dei ripetenti per il primo anno, aq il numero dei ripetenti per il secondo anno. Allora valgono le relazioni:

$$\frac{ap}{a + ap + aq} = \frac{1}{5}$$ (la percentuale dei ripetenti del 1° anno è 20 %)

$$\frac{aq}{a + ap + ap} = \frac{1}{20}$$ (la percentuale dei ripetenti per la seconda volta è il 5 %)

Ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} p = \frac{1}{5}(1 + p + q) \\ q = \frac{1}{20}(1 + p + q) \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} 5p = 1 + p + q \\ 20q = 1 + p + q \end{cases} \qquad \begin{cases} 4p - q = 1 \\ -p + 19q = 1 \end{cases}$$

Moltiplicando la seconda equazione per 4 e sommando membro a membro si ricava $75q = 5$, cioè $q = \frac{1}{15}$, da cui $p = \frac{4}{15}$.

In conclusione: la percentuale degli allievi che vengono bocciati almeno una volta è $p = \frac{4}{15} = 26{,}6\ldots\ \%$, la percentuale di coloro che vengono bocciati due volte è $q = \frac{1}{15} = 6{,}6\ldots\ \%$. Infine fra quelli che sono bocciati una prima volta la percentuale di coloro che sono bocciati una seconda volta è $\frac{q}{p} = \frac{1}{4} = 25\ \%$.

Problema 5. Vediamo ora come l'impiego dei sistemi lineari può consentire il calcolo della probabilità di certi eventi piuttosto complessi. Il pro-

blema che proponiamo è un caso molto semplice del classico problema della «rovina del giocatore».

Nico e Peppo giocano una serie di partite d'azzardo; ad ogni partita, Nico ha probabilità p di vincere $(0 < p < 1)$, *Peppo ha probabilità q* di *vincere* $(p + q = 1)$. *All'inizio Nico possiede* 1000 *lire, Peppo* 2000; *ad ogni partita chi vince riceve* 1000 *lire dall'altro; il gioco finisce quando uno dei due giocatori è sbancato. Si domanda quale probabilità ha ciascuno di vincere.*

La situazione del gioco può essere descritta mediante un insieme di 4 elementi, che corrispondono alla possibile ripartizione del denaro (L 3000 complessive) fra i due giocatori. Nello schizzo qui accanto i numeri indicano il denaro posseduto da Nico (espresso in K£); ovviamente il denaro posseduto da Peppo è il complemento a 3 K£ del denaro posseduto da Nico. Ad ogni partita il punto che rappresenta la situazione del gioco si sposta verso l'alto (se Nico vince) oppure verso il basso (se vince Peppo); il gioco finisce quando si arriva al punto 3 (con vittoria di Nico) o al punto 0 (con vittoria di Peppo).

Fig. 18

L'andamento delle successive partite può essere rappresentato da un grafo. Il cammino tracciato nella figura rappresenta un gioco in cui Nico viene sbancato alla quinta partita. Ci si rende conto che per valutare la probabilità di vittoria di un giocatore o dell'altro si deve tener conto di un'infinità di cammini diversi. Infatti, il gioco può rimanere indeciso per un numero di partite arbitrariamente grande; anzi non è neppure escluso che il gioco si mantenga indeciso per una successione infinita di partite [ma questo evento ha probabilità nulla: vedere esercizio 6) alla fine del §].

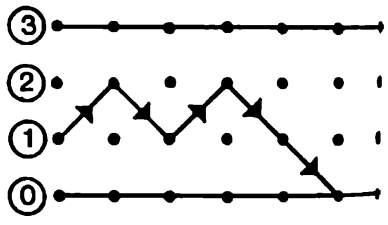


Fig. 19

Procediamo, per via indiretta, in questo modo: indichiamo con x la probabilità che ha Nico di vincere partendo dal punto ① (questa è appunto la probabilità richiesta dall'enunciato del pro-

blema); indichiamo con y la probabilità che Nico ha di vincere partendo dal punto ② .

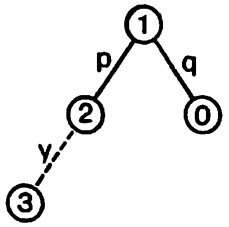


Fig. 20

Partendo da ① si arriva a ② con probabilità p e si arriva a ⓪ con probabilità q. Arrivati a ② vi è, sempre per Nico, la probabilità y di vincere.

Nel grafo qui accanto la linea tratteggiata indica una transizione che si può effettuare con una molteplicità di cammini diversi. Dunque

$$x = py \tag{29}$$

Analogamente, partendo da ② vi è probabilità p di passare a ③ (e quindi di vittoria per Nico) e probabilità q di passare a ①; di qui vi è, per Nico, probabilità x di vincere.

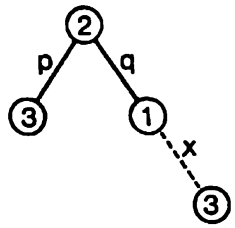


Fig. 21

Vale allora la relazione

$$y = p + qx \tag{30}$$

Dunque, le probabilità x ed y soddisfano al sistema (29) , (30) che si può scrivere così:

$$\begin{cases} x - py = 0 \\ -qx + y = p \end{cases}$$

Moltiplicando la seconda equazione per p e sommando membro a membro con la prima si ha $(1 - pq)\, x = p^2$; essendo $0 < p < 1$, $0 < q < 1$, risulta $1 - pq > 0$. Perciò

$$x = \frac{p^2}{1 - pq}$$

Moltiplicando invece la prima equazione per q e

sommando membro a membro con la seconda si ottiene $(1 - pq)\, y = p$, da cui

$$y = \frac{p}{1 - pq}$$

Vocaboli e simboli

quadrante (del piano cartesiano)
forma normale (dell'equazione della retta)
matrice: $\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$; **determinante** della matrice: $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$
forma generale (dell'equazione della retta)
pendenza (coefficiente angolare)
termine costante
monomio lineare
polinomio (espressione, funzione) **lineare,**
polinomio lineare omogeneo
sistema lineare; coefficienti, termini noti
fascio (di rette)
programmazione lineare
vincolo
funzione di scopo
parametro. Nella formulazione di un problema, si dice parametro una lettera che rappresenta una quantità nota, ma variabile. Ad esempio, nel sistema (11) i coefficienti e i termini noti sono parametri

Esercizi

1 Un ragazzo corre da un capo all'altro del giardino (distanti fra loro 20 m) alla velocità di 4 m/sec. Arrivato ad un estremo, si ferma per un secondo e riprende la corsa in senso opposto. Descrivere graficamente la legge del moto.

2 Tre amici partono per un viaggio turistico in automobile; i primi due decidono di viaggiare alla velocità costante di 80 km/h, con un intervallo di 15 minuti l'uno dall'altro. Il terzo, che ama la velocità, vuole viaggiare a 120 km/h; parte

contemporaneamente al secondo automobilista e procede fino a raggiungere il primo; raggiuntolo, si ferma e aspetta l'arrivo del secondo; poi riparte, e cosí di seguito.
Descrivere graficamente la legge del moto dei tre automobilisti e trovare i tempi in cui il terzo automobilista raggiunge il primo.

* **3** Un uomo ha camminato per cinque ore, prima lungo una strada piana, poi in salita; poi è tornato indietro percorrendo la stessa strada. Si è mosso alla valocità di 4 km all'ora in pianura, 3 km all'ora in salita, 6 km all'ora in discesa.
Trovare la distanza percorsa. (Sembrerebbe di non avere dati sufficienti ... procedere nei calcoli con fiducia!).
Supponendo in generale, che le velocità in pianura, in salita, in discesa, siano rispettivamente u, v, w, è possibile in ogni caso determinare la distanza percorsa? Se non è possibile determinarla, è almeno possibile stabilire per essa delle disuguaglianze?

4 Ritornare al problema 5. Dimostrare che (come è certamente vero «a priori» dal momento che si tratta di probabilità) i numeri x ed y sono minori di 1.

** **5** Ancora sul problema 5. Trovare la probabilità che il gioco si mantenga indeciso in un numero n di partite. Rendersi conto che questa probabilità diventa arbitrariamente piccola se si prende n sempre piú grande.

18

Il secondo grado

18.1 Come sappiamo già da tempo (Cfr. § 14.3), l'insieme * dei punti che hanno uguale distanza da due punti A, B è una retta (asse del segmento $[A, B]$). Risulta spontaneo chiedersi qual è l'insieme dei punti che hanno uguale distanza da un punto e da una retta fissati; come vedremo, questo insieme è diverso dalle figure che già conosciamo, ed ha molte interessanti proprietà.

La parabola

Dati una retta $\mathfrak{D}$ *ed un punto* F *fuori di essa, si dice* **parabola** *di* **fuoco** F *e di* **direttrice** $\mathfrak{D}$ *l'insieme dei punti* P *che hanno uguale distanza dal punto* F *e dalla retta* $\mathfrak{D}$.

Andiamo alla ricerca dei punti del piano che hanno questa proprietà. Ce n'è uno che si presenta spontaneamente; prendiamo il punto T della retta $\mathfrak{D}$ che ha minima distanza da F (lo possiamo ottenere intersecando $\mathfrak{D}$ con la perpendicolare mandata da F a $\mathfrak{D}$): ebbene, il punto di mezzo V del segmento $[F, T]$ è, evidentemente, equidistante da F e dalla retta $\mathfrak{D}$ ed è perciò un punto della parabola. Il punto V è detto **vertice** *della parabola.*

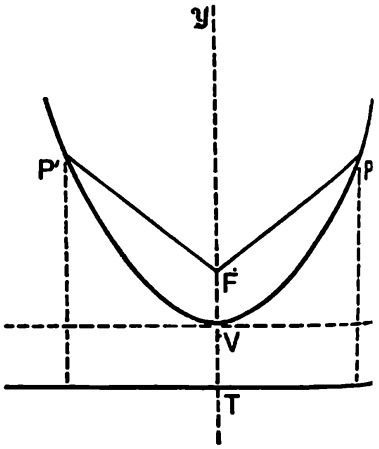


Fig. 1

Notiamo subito che la retta FT è un asse di simmetria della parabola. Infatti la simmetria di asse FT trasforma in sé la retta $\mathfrak{D}$ che è ortogonale

* Il termine che si usa tradizionalmente in geometria per indicare l'insieme dei punti che soddisfano ad una certa condizione è « luogo geometrico »: ad esempio, si dice che il cerchio con centro Q e raggio r è il luogo dei punti che hanno distanza r da Q.

ad FT. Un punto P della parabola viene mutato in un punto P' che ha la medesima distanza da F e dalla retta $\mathfrak{D}$, e che perciò è ancora un punto della parabola.

È facile costruire « per punti » la parabola: lasciamo al lettore il compito di eseguire un disegno accurato, costruendo alcuni punti della parabola, a distanze assegnate dal fuoco.

Ora vogliamo procurarci una rappresentazione analitica della parabola. Introduciamo gli assi cartesiani; assumiamo come asse $\mathfrak{X}$ la retta parallela a $\mathfrak{D}$ passante per il vertice V e come asse $\mathfrak{Y}$ la retta FT, cioè l'asse della parabola. Il vertice coincide dunque con l'origine del riferimento cartesiano. Indichiamo con p la distanza del fuoco dalla direttrice; in questo modo, se l'asse $\mathfrak{Y}$ è orientato verso il fuoco, si ha $F \leftrightarrow \left(0, \frac{p}{2}\right)$ e la direttrice ha come equazione $y = -\frac{p}{2}$.

Il numero p viene detto **parametro** della parabola;

il numero $\frac{p}{2}$ è detto **distanza focale.**

La distanza del punto $P \leftrightarrow (x, y)$ dalla retta $\mathfrak{D}$ è data da $\left| y - \left(-\frac{p}{2}\right) \right| = \left| y + \frac{p}{2} \right|$ (ricordare il § 15.3); la distanza di P da F è

$$\overline{PF} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}$$

Allora il punto P appartiene alla parabola se e solo se risulta

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \left|y + \frac{p}{2}\right|$$

x	x^2
± 0	0
$\pm 0{,}5$	0,25
± 1	1
± 2	4
± 3	6
± 4	16
± 5	25
± 6	36

Questa relazione di uguaglianza fra due numeri non negativi equivale a quella che si pone fra i loro quadrati:

$$x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2$$

(elevando al quadrato, il segno di « valore assoluto » si può eliminare).

Sviluppando e semplificando, si ha

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$$

da cui

$$x^2 - py = + py \text{ , cioè } x^2 = 2py$$

da cui infine

$$y = \frac{1}{2p} x^2 \qquad (1)$$

Dunque, con la scelta degli assi che abbiamo fatto, la parabola si ottiene come grafico di una funzione molto semplice:

$$x \longrightarrow \frac{1}{2p} x^2$$

In particolare, per $p = \frac{1}{2}$, questa è la funzione « quadrato » che possiamo facilmente tabulare, e di cui possiamo disegnare il grafico.

La parabola è meno popolare del cerchio perché non esiste, per costruirla graficamente, uno strumento cosí semplice come è il compasso. Inoltre

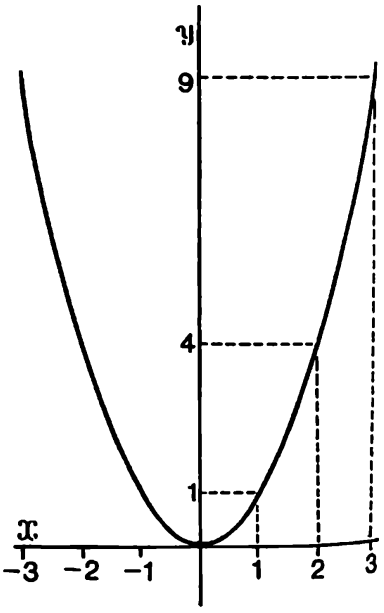


Fig. 2

la parabola è un insieme illimitato (cioè: dato un numero qualsiasi, si trovano due punti della parabola che hanno fra loro distanza maggiore di quel numero: lo si dimostri per esercizio); quindi nel disegno possiamo riprodurre solo un arco parziale di parabola. Tuttavia, la parabola ha molte belle proprietà, che la rendono interessante anche in questioni pratiche. Consideriamo, ad esempio, uno specchio *parabolico*, cioè avente una superficie riflettente che si può pensare ottenuta facendo ruotare una parabola attorno al suo asse. I raggi luminosi che arrivano secondo la direzione dell'asse vengono riflessi dallo specchio in modo da passare tutti per il fuoco * F. (Il nome di fuoco deriva appunto da ciò). Per questo motivo gli specchi riflettenti dei telescopi sono in generale parabolici. Anche i fari delle automobili hanno specchi parabolici e il filamento della lampadina è posto in prossimità del fuoco.

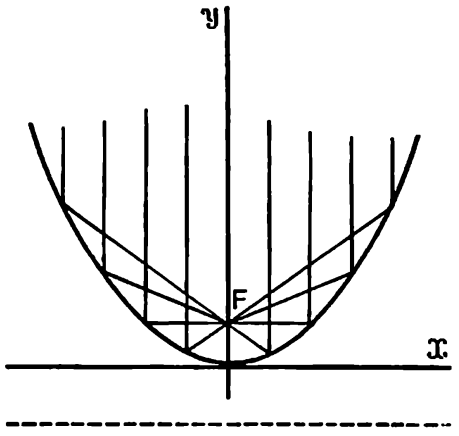


Fig. 3

Nella (1) poniamo, per semplicità di scrittura, $\frac{1}{2p} = a$; l'equazione della parabola diventa allora

$$y = ax^2 \qquad (2)$$

Facciamo qualche semplice osservazione. L'equazione (2) mette bene in evidenza la simmetria della parabola rispetto all'asse y, già notata. Infatti è evidente che se un punto $P \leftrightarrow (x\ ,\ y)$ sta sulla parabola, anche il punto $P' \leftrightarrow (-x\ ,\ y)$ sta sulla parabola.

Notiamo che se, come abbiamo supposto finora, è $a > 0$, i punti della parabola stanno tutti nel semipiano $y \geqslant 0$. Possiamo però evidentemente dare significato alla (2) anche per $a < 0$; essendo $p =$

* Accettando alcune premesse di carattere fisico — abbastanza ovvie — riguardo alla riflessione della luce da parte delle superfici, la proprietà enunciata viene resa evidente dalla conclusione dell'esercizio 12 di questo §.

$= \dfrac{1}{2a}$, è come se in questo caso scambiassimo fra loro l'ordinata del fuoco e quella della direttrice; se è $a < 0$, la (2) rappresenta una parabola che sta nel semipiano $y \leq 0$. Notiamo che, in ogni caso, le parabole $y = ax^2$ e $y = -ax^2$ sono ottenute l'una dall'altra mediante una simmetria assiale di asse $\mathfrak{X}$.

Supponiamo ora di fissare gli assi cartesiani $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ e di voler rappresentare una *qualsiasi parabola* $\mathfrak{P}$ *avente l'asse parallelo all'asse* $\mathfrak{Y}$; sia $V \leftrightarrow (x_0 , y_0)$ il vertice della parabola. Notiamo che una qualunque isometria (e, in particolare, una traslazione) trasforma una parabola $\mathfrak{P}$ in una nuova parabola $\mathfrak{P}'$: infatti, se F e $\mathfrak{D}$ sono fuoco e direttrice di $\mathfrak{P}$, un punto P di $\mathfrak{P}$ viene trasformato in un punto P' equidistante da F' (trasformato di F) e da $\mathfrak{D}'$ (trasformata di $\mathfrak{D}$); quindi P' appartiene alla parabola $\mathfrak{P}'$ che ha fuoco F' e direttrice $\mathfrak{D}'$.

Consideriamo dunque, nel nostro caso, la traslazione t di equazione

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \qquad (3)$$

che porta il vertice $V \leftrightarrow (x_0 , y_0)$ nell'origine; essa porta la parabola $\mathfrak{P}$ in una parabola $\mathfrak{P}'$ che ha il vertice nell'origine e che ha l'asse coincidente con l'asse $\mathfrak{Y}$.

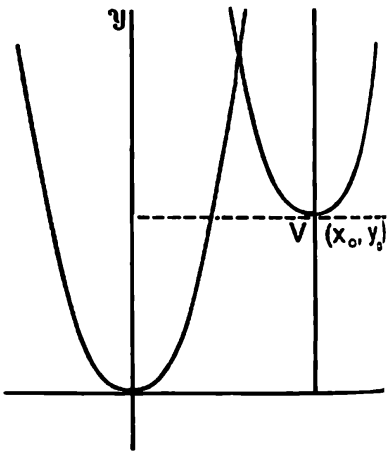


Fig.4

Pertanto $\mathfrak{P}'$ avrà come equazione

$$y' = a\,x'^2 \qquad (4)$$

Ora possiamo determinare l'equazione di $\mathfrak{P}$ in questo modo: un punto $P \leftrightarrow (x , y)$ sta sulla parabola $\mathfrak{P}$ se e solo se $P' \leftrightarrow (x' , y')$ sta sulla parabola $\mathfrak{P}'$ di equazione (4), cioè se risulta

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2 \qquad (5)$$

Sviluppando e semplificando, si ottiene

$$y = ax^2 - 2ax_0\, x + ax_0^2 + y_0$$

che si può scrivere

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (6)$$

avendo posto:

$$b = -2ax_0$$
$$c = ax_0^2 + y_0 \qquad (7)$$

Dunque, una qualsiasi parabola con l'asse parallelo all'asse y si ottiene come grafico di una funzione $x \longrightarrow ax^2 + bx + c$.

Il polinomio $ax^2 + bx + c$ è di secondo grado nella variabile x: come vedremo piú ampiamente in seguito, si dice **grado** di un polinomio in x, in forma canonica, la massima potenza con cui compare la variabile x. Il polinomio $ax^2 + bx + c$ (che, essendo composto di tre monomi, si chiama usualmente **trinomio**) è effettivamente di secondo grado perché nel nostro caso è certamente $a \neq 0$.

Questa considerazione ci porta spontaneamente a chiederci se, reciprocamente, ogni trinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$) ha come grafico una parabola con l'asse parallelo all'asse y.

La risposta è affermativa. Infatti, invertendo il procedimento che abbiamo seguito prima, domandiamoci se, dati comunque a, b, c (con $a \neq 0$), possiamo determinare (x_0, y_0) in modo tale che attraverso le formule (3) si possa passare dalla (4) alla (6); basta allora che siano verificate le (7). Da queste si ricava:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$y_0 = c - ax^2{}_0 = c - a\frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Cosí si dimostra che la (6) rappresenta, in ogni caso, una parabola, e si esprimono le coordinate (x_0 , y_0) del suo vertice.

Si può arrivare allo stesso risultato con un altro metodo.

Operiamo sul trinomio $ax^2 + bx + c$ con la tecnica del « completamento del quadrato ».

Otteniamo

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c$$

cosí si ricava dunque l'importante identità

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \qquad (8)$$

L'equazione (6) allora diventa

$$y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Ora, se si fa una traslazione cosí definita,

$$\begin{cases} x + \dfrac{b}{2a} = x' \\ y + \dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = y' \end{cases}$$

l'equazione diventa $y' = ax'^2$, che coincide con la (4) e rappresenta una parabola che ha come vertice il corrispondente del punto $x' = 0\,,\ y' = 0\,,$ cioè il punto

$$V \leftrightarrow \left(-\frac{b}{2a}\,,\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \qquad (9)$$

L'asse della parabola è parallelo all'asse y, e perciò ha l'equazione $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Esercizi

1 Data una retta $\mathfrak{D}$ ed un punto F di $\mathfrak{D}$, qual è l'insieme dei punti che hanno uguale distanza da F e da $\mathfrak{D}$?

2 Dimostrare direttamente (cioè facendo uso della definizione) che la parabola sta tutta in uno stesso semipiano rispetto alla retta parallela alla direttrice e passante per il vertice. (Il semipiano è, ovviamente, quello che contiene il fuoco).

3 Dati un cerchio ed una retta ad esso esterna, qual è l'insieme dei punti che hanno uguale distanza dal cerchio e dalla retta?

4 Data una retta $\mathfrak{D}$, un punto F fuori di essa e presi gli assi cartesiani come nel testo, caratterizzare, mediante una relazione fra le coordinate, i punti del piano per cui la distanza da F è *minore* della distanza da $\mathfrak{D}$. (Questi punti vengono detti *interni* alla parabola di fuoco F e direttrice $\mathfrak{D}$). Dopo aver fatto uno schizzo della parabola, tratteggiare l'insieme in questione.

* **5** Dimostrare con metodo analitico che se due punti $P\,,\ Q$ stanno su una parabola il punto di mezzo del segmento $[P\,,\ Q]$ è interno alla parabola.

** **6** Risolvere l'esercizio precedente per via sintetica.

* **7** Dimostrare per via analitica che tre punti di una parabola non possono essere allineati.

8 Trovare direttrice, asse e fuoco delle parabole rappresentate dalle seguenti equazioni:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 10 \quad , \quad y = (x+1)^2 + (x+2)^2 \quad , \quad y = -x^2 + 3x + 1$$

9 Trovare l'equazione della parabola che ha il fuoco nel punto $F \leftrightarrow (3, 5)$ e ha come direttrice la retta $y = 1$. Idem per la parabola che ha il fuoco nel punto $(5, 3)$ e ha come direttrice la retta $x = 1$.

10 Considerare ancora lo specchio parabolico (fig. 3); supponiamo che sul fuoco vi sia una sorgente luminosa. Dimostrare che i raggi che arrivano su un piano perpendicolare all'asse hanno tutti la stessa lunghezza.

11 Un cerchio col centro nel fuoco di una parabola quanti punti può avere in comune con la parabola?

** **12** Data una parabola $\mathcal{T}$ mediante il fuoco F e la direttrice $\mathcal{D}$, costruire l'intersezione di $\mathcal{T}$ con una retta $\mathcal{R}$ perpendicolare alla direttrice. Detto Q il punto di intersezione di $\mathcal{R}$ con $\mathcal{D}$, e detta $\mathcal{C}$ la retta asse del segmento $[F, Q]$, il punto cercato è evidentemente l'intersezione di $\mathcal{C}$ con $\mathcal{R}$.
Dimostrare che la retta $\mathcal{C}$ ha un solo punto in comune con $\mathcal{T}$.
(Una retta che ha un solo punto in comune con una parabola si può dire *tangente* alla parabola).
È interessante notare che il punto Q ed il fuoco F risultano simmetrici rispetto alla retta tangente $\mathcal{C}$.

18.2 Un'equazione del tipo

Le equazioni di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (10)$$

dove a, b, c sono numeri assegnati, con $a \neq 0$, si dice *equazione di secondo grado*. Non è la prima volta che troviamo equazioni di secondo grado: abbiamo già considerato nel cap. 11 equazioni del tipo $x^2 = l$ ossia $x^2 - l = 0$. Un'equazione come questa non ha soluzioni se è $l < 0$, ha solo la soluzione nulla se è $l = 0$, mentre ha due soluzioni se è $l > 0$: $x_1 = \sqrt{l}$, $x_2 = -\sqrt{l}$. Ricordiamo che con il simbolo $\sqrt{l}$ noi indichiamo la radice quadrata *non negativa* di l; teniamo anche presente che è essenziale cercare le soluzioni del nostro problema nell'insieme dei numeri reali; infatti, come sappiamo dal cap. 11, l'equazione

$x^2 = l$ può essere priva di soluzioni razionali anche quando l è razionale.

L'equazione (10) può essere collegata con questo semplice problema: trovare i punti in cui la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ taglia l'asse $\mathfrak{X}$. Viene allora spontaneo servirci delle manipolazioni che abbiamo già eseguito sul trinomio di secondo grado. Tenendo conto della (8), la (10) equivale all'equazione

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

che si può scrivere, dividendo per a,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad (11)$$

Consideriamo l'espressione fratta che figura al secondo membro: il denominatore $4a^2$, essendo il quadrato di un termine non nullo, è certamente positivo; il segno del secondo membro dipende allora dal numeratore, cioè dal polinomio $b^2 - 4ac$ che viene detto **discriminante** dell'equazione.

Si ha allora questa semplice casistica:

Se è $b^2 - 4ac < 0$ non vi sono soluzioni perché nella (11) il primo membro, essendo un quadrato, è necessariamente ≥ 0, mentre il secondo membro è negativo.

È facile dare una rappresentazione geometrica di questa situazione: la formula (9) ci dice che l'ordinata y_0 del vertice della parabola $y = ax^2 + bx + c$ è data da

$$y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Allora se è $a > 0$, essendo $b^2 - 4ac < 0$, risulta $y_o > 0$: la parabola è « rivolta verso l'alto » ed y_o, minima ordinata dei punti della parabola, è positiva. Dunque la parabola non taglia l'asse x.

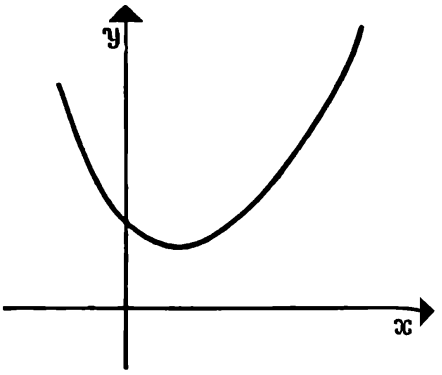


Fig. 5

Se è $a < 0$, essendo $b^2 - 4ac < 0$, risulta $y_o < 0$: la parabola è « rivolta verso il basso » ed y_o, massima ordinata dei suoi punti, è negativa. Dunque, neppure in questo caso la parabola taglia l'asse x.

Se è $b^2 - 4ac = 0$, risulta $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, cioè $x + \frac{b}{2a} = 0$ e allora l'unica soluzione è $x = -\frac{b}{2a}$. Della (9) si vede che è $y_o = 0$, cioè il vertice della parabola si trova sull'asse x. L'esistenza di un'unica soluzione è evidente nella rappresentazione geometrica sia nel caso $a > 0$ che nel caso $a < 0$.

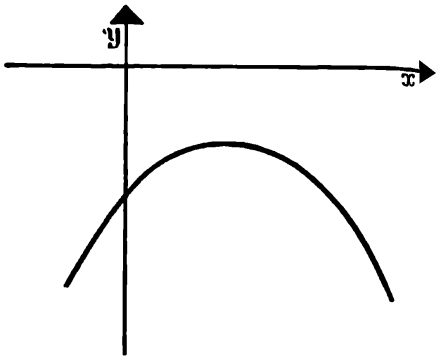


Fig. 6

Se è $b^2 - 4ac > 0$, riflettiamo che il termine $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ è positivo e ha due radici quadrate, fra loro opposte, che si possono scrivere:

$$-\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

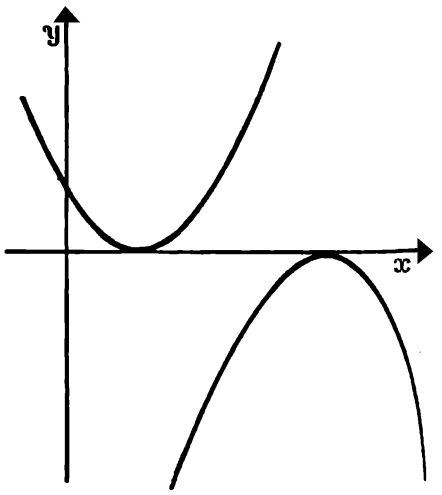


Fig. 7

Dunque, la (10) equivale a

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

oppure

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Indicando con x_1 la soluzione della prima e con x_2 la soluzione della seconda, si ha:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (12)$$

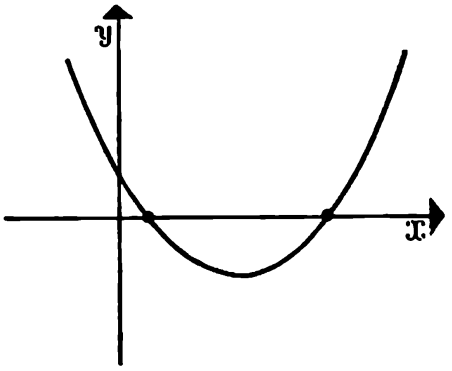


Fig. 8

Dunque in questo caso vi sono due soluzioni.

L'interpretazione geometrica è semplice: se è $a > 0$ l'ordinata del vertice y_0 è negativa e allora la parabola, essendo rivolta verso l'alto, taglia l'asse x in due punti, mentre se è $a < 0$ l'ordinata del vertice y_0 è positiva e la parabola, essendo rivolta verso il basso, taglia l'asse x in due punti distinti.

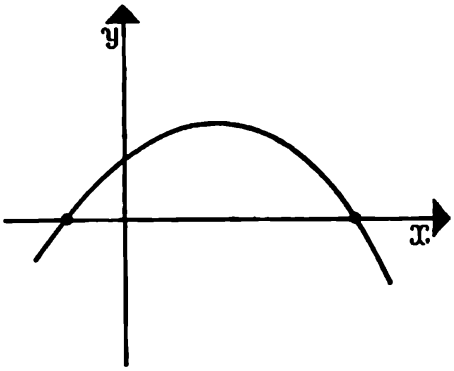


Fig. 9

Vediamo ora alcuni problemi che conducono ad un'equazione di secondo grado.

1) Piegando un foglio di carta rettangolare è possibile dividerlo in due parti rettangolari uguali fra loro e simili al foglio originario? (abbiamo già conosciuto nelle scuole medie il significato di quel termine «simili»; piú avanti riprenderemo in modo preciso questa nozione. Qui vogliamo dire che il rapporto delle misure dei lati del rettangolo grande deve risultare uguale al rapporto — in ordine opportuno — delle misure dei lati del rettangolo piccolo).

Sia l la misura del lato maggiore del rettangolo; indichiamo con x la misura del lato minore. Poiché è evidente che è il lato maggiore a dover essere piegato in due, si ha la relazione

$$\frac{l}{x} = \frac{x}{\frac{l}{2}} \quad \text{cioè} \quad x^2 = \frac{l^2}{2}$$

Questa equazione si risolve immediatamente; le soluzioni sono:

$$x_1 = -\frac{l}{\sqrt{2}} \quad , \quad x_2 = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

Evidentemente, la prima soluzione non interessa perché le misure dei segmenti sono date da numeri positivi. Dunque è possibile piegare il foglio in modo da soddisfare alle condizioni poste quando il rapporto del lato minore al lato maggiore è $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e solo in questo caso.

2) Poniamoci un altro problema, analogo. Si tratta di vedere se esiste un rettangolo con queste proprietà: togliendo da esso un quadrato, si ottiene un rettangolo della stessa forma del precedente. Indichiamo con x ed l le misure dei lati del rettangolo ($x < l$). Il nuovo rettangolo ha i lati di misura x ed $l - x$. La condizione che i due rettangoli hanno la stessa forma si esprime così:

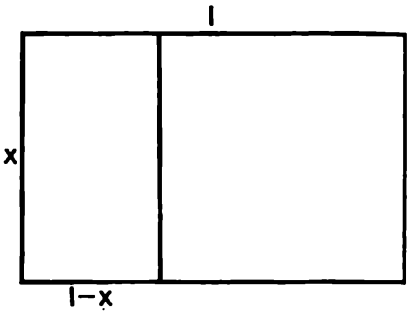


Fig. 10

$$\frac{l}{x} = \frac{x}{l - x}$$

Da questa si ottiene facilmente l'equazione

$$x^2 + lx - l^2 = 0$$

Il discriminante di questa equazione è uguale a $5l^2$; esistono dunque due soluzioni, che si trovano applicando la formula risolutiva:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} l \quad , \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} l$$

Di queste radici la prima, che è negativa, non ci interessa; la soluzione cercata è la seconda, che è detta *parte aurea di l*. Il rapporto fra le misure dei lati è $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Questo numero è detto *rapporto aureo* *.

In questi due problemi abbiamo dovuto considerare non accettabile una soluzione dell'equazione in cui era stato tradotto il problema. Questo fatto, benché giustificato dall'evidenza, può lasciare perplessi, ed esige qualche parola di spiegazione.

Cominciamo con l'affermare che ogni problema deve venire ambientato in un ben determinato insieme; in altre parole: non ha senso chiedersi se un problema ha soluzione se non si è precisato dove si devono cercare le soluzioni. Questa affermazione può apparire lapalissiana: eppure molti equivoci ed errori provengono dal non tenerne conto. Si potrebbe aggiungere che in certi problemi matematici elevati la fatica maggiore è quella di trovare un insieme in cui il problema possa essere impostato in modo ragionevole. Nei casi concreti ora considerati, trattandosi di misure di segmenti, è chiaro che l'insieme in cui impostare il problema è quello dei numeri reali positivi.

Tuttavia l'insieme-ambiente del problema può essere cattivo sotto il profilo algebrico; questo è il caso appunto dell'insieme dei numeri reali positivi: basta tenere presente che l'operazione di « opposto » non vi si può eseguire. Conviene allora cercare un ambiente piú vasto e dotato di soddisfacenti proprietà algebriche: nel nostro caso

* All'inizio del '500, il matematico italiano Luca Pacioli scrisse un libro sul rapporto aureo intitolato *De Divina proportione*. In questa opera, che fu illustrata da Leonardo da Vinci, egli descrisse con grande entusiasmo tredici proprietà di questo meraviglio numero.

è la retta reale **R**. Tuttavia, una volta risolta l'equazione in questo nuovo ambiente piú vasto, il discorso non è finito: occorre eliminare le soluzioni che appartengono all'ambiente piú vasto, ma non all'ambiente originario del problema: quest'ultima fase si chiama *discussione* del problema.

Ed ecco un altro problema che esige una piccola discussione:

3) In un torneo di scacchi i partecipanti si affrontano a due a due in tutti i modi possibili, cosí che ciascuno combatta — una volta sola — contro ciascun altro. In tutto vengono disputate 28 partite. Quanti sono i partecipanti?

Indichiamo con x il loro numero. Sappiamo che in un insieme di x elementi, il numero dei sottoinsiemi di due elementi è dato da $\binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$ (Vedere §§ 6.3 e 12.4: del resto, il conto è presto fatto se si pensa che ogni partecipante deve gareggiare con $x-1$ avversari...). Si ha allora l'equazione

$$\frac{x(x-1)}{2} = 28$$

dove però x deve essere un intero positivo. L'equazione si può scrivere

$$x^2 - x - 56 = 0$$

La formula risolutiva ci dà le soluzioni

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 56}}{2} = \frac{1 \pm 15}{2}$$

cioè -7 oppure 8. La soluzione -7 non è accettabile; la soluzione del nostro problema è $x = 8$.

Il nostro problema era da ambientarsi nell'insieme degli interi positivi; abbiamo trovato comodo (come facciamo sempre nel caso di un'equazione di secondo grado) ambientarlo nella retta reale; la discussione ci ha portato ad eliminare una soluzione non significativa.

In questo caso particolare avremmo potuto ambientare il problema anche nell'insieme degli interi naturali, scrivendo la nostra equazione in questa forma:

$$x(x-1) = 56$$

Per risolverla si tratta di vedere in quanti modi il numero 56 può essere scomposto nel prodotto di due fattori (interi), e di vedere se fra le coppie di fattori ve n'è una costituita da interi consecutivi.

Compilando l'elenco dei divisori di 56, si trova subito che v'è un'unica coppia accettabile: (8 , 7); la soluzione cercata è $x = 8$. *Si è potuto seguire questa via perché c'era solo un numero finito di casi da esaminare.*

4) Trovare le intersezioni della parabola $y = x^2$ con una retta passante per l'origine.

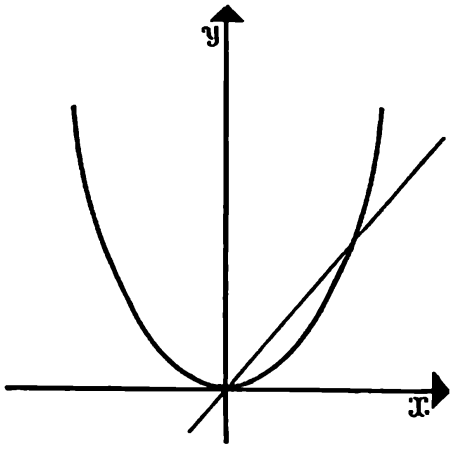


Fig. 11

Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = px \end{cases}$$

Si ricava immediatamente l'equazione $x^2 = px$, cioè $x^2 - px = 0$.

In questo caso non c'è nessun bisogno di applicare la formula risolutiva: infatti, l'equazione si può scrivere $x(x - p) = 0$.

Allora, le soluzioni sono due: $x = 0$, $x = p$. La prima soluzione era già scontata perché sapevamo già che l'origine sta sulla parabola.

Tenendo conto della prima (o della seconda) equazione del sistema si trova che i punti di intersezione sono $(0, 0)$ e (p, p^2). Notiamo che ogni retta diversa dagli assi taglia la parabola in un ulteriore punto, oltre l'origine.

Esercizi

1 Risolvere le seguenti equazioni di secondo grado ripetendo passo per passo il procedimento generale indicato all'inizio del § («completamento del quadrato»...):

$x^2 + 2x + 5 = 0$, $x^2 + 2x - 10 = 0$, $2x^2 - 3x - 1 = 0$

$4x^2 - 4ax + (a^2 - 1) = 0$, $2x^2 - 7x + 3 = 0$, $4x^2 + 4x + 1 = 0$

2 Risolvere le seguenti equazioni di secondo grado applicando la formula risolutiva (che, per ovvio motivo di praticità, deve essere ricordata a memoria):

$9x^2 - 9x + 2 = 0$, $3x^2 - 5x + 10 = 0$, $9x^2 + 3x + 1 = 0$

$x^2 + mx + (m^2 - 1) = 0$, $x^2 + 2mx + (m^2 + 1) = 0$

$abx^2 - (a^2 + b^2)\, x + ab = 0$

3 Disponendo di un piccolo calcolatore (che fornisca la radice quadrata!) calcolare, con l'approssimazione consentita dallo strumento, le soluzioni delle seguenti equazioni:

$x^2 + 3\sqrt{2}x + 4 = 0$, $x^2 - x + 0{,}003 = 0$, $x^2 + x + 0{,}003 = 0$

$x^2 + 10x - 10 = 0$, $x^2 + 100x - 100 = 0$, $x^2 + 1000x - 1000 = 0$

(Si osserva qualcosa di interessante nei risultati delle tre ultime equazioni?).

Se si dispone di un calcolatore programmabile, eseguire il programma della formula risolutiva.

* **4** Considerare le soluzioni delle seguenti equazioni (in cui è $a \neq 0$, $c \neq 0$, $b^2 - 4ac > 0$):

$ax^2 + bx + c = 0$, $a + bz + cz^2 = 0$

Che relazioni ci sono fra le soluzioni della prima e quelle della seconda? Che succede se è $a = c$? Analogamente, che relazioni ci sono fra le soluzioni delle due seguenti equazioni?

$ax^2 + bx + c = 0$, $ax^2 - bx + c = 0$?

5 Si indichi con p la probabilità che ha un tiratore di colpire il bersaglio in un singolo tiro. Come deve essere p perché la probabilità di colpire il bersaglio almeno una volta in due tiri successivi sia 0,75?

6 Risolvere le seguenti equazioni:

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}=5 \quad , \quad \frac{12}{x-1}=x-2 \quad , \quad \frac{a+x}{b+x}+\frac{b+x}{a+x}=\frac{5}{2}$$

7 Per quali valori del parametro λ l'equazione $x+\frac{1}{x}=\lambda$ ha soluzioni?

8 In un sacchetto ci sono 10 palline rosse; quante palline azzurre occorre aggiungere perché la probabilità di estrarre per due volte consecutive (senza mettere la pallina estratta nel sacchetto) una pallina rossa sia $\frac{3}{7}$?

9 Due rette $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ passano per i punti $O \leftrightarrow (0,0)$, $Q \leftrightarrow (0,3)$, rispettivamente, e si incontrano perpendicolarmente in un punto della retta $x=1$. Trovarne l'equazione. (Prendere come incognita l'ordinata del punto di intersezione, sulla retta $x=1$ e scrivere la relazione che sussiste fra i coefficienti angolari delle due rette).

10 Risolvere i seguenti sistemi lineari contenenti il parametro λ:

$$\begin{cases} x+\lambda y=1 \\ \lambda x+y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (1+\lambda)x+\lambda y=2 \\ 3\lambda x+4y=3 \end{cases}$$

(Si dovrà dire per quali valori di λ vi sono soluzioni e, per questi valori, esprimere le soluzioni).

11 Ritorniamo al problema 5 del § 17.6. Come deve essere p perché il gioco fra Nico e Peppo sia equo?

** **12** Si lancia un sasso in direzione verticale; successivamente, dallo stesso punto, si lancia un altro sasso, sempre in direzione verticale. In quali casi i due sassi si incontrano?
(Preso un asse diretto verso l'alto, la coordinata s di un grave che all'istante $t=0$ venga lanciato verso l'alto con velocità v è data dalla relazione $s=-\frac{1}{2}gt^2+vt$, dove g è l'accelerazione della gravità).
È utile servirsi della rappresentazione geometrica.

18.3 *a*) La formula risolutiva ci permette di ottenere due relazioni molto interessanti che sussistono fra le soluzioni dell'equazione (10) e i coefficienti a, b, c. Supponiamo che il discriminante

Relazioni fra le radici e i coefficienti

non sia negativo; esistono allora le soluzioni x_1 ed x_2 espresse dalle (12). Sommando membro a membro le due relazioni (12) si ottiene

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \tag{13}$$

È facile dare un'interpretazione geometrica di questa relazione: moltiplicando ambo i membri per $\frac{1}{2}$ si ottiene

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\frac{b}{2a}$$

Questa relazione può essere letta così: *il punto medio dell'intervallo che la parabola* $y = ax^2 + bx + c$ *stacca sull'asse* $\mathfrak{X}$ *appartiene all'asse della parabola*; infatti la (9) ci dice che l'asse della parabola ha l'equazione $x = -\frac{b}{2a}$, essendo appunto uguale a $-\frac{b}{2a}$ l'ascissa del vertice.

Ora moltiplichiamo membro a membro le (12), avendo posto per brevità $\Delta = b^2 - 4ac$. Abbiamo

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) =$$

$$= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

dunque

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \tag{14}$$

Riflettiamo: nella (13) e nella (14) x_1 ed x_2 entrano in modo simmetrico (in virtú della proprietà commutativa dell'addizione e della moltiplicazione): cosí non ha importanza che x_1 indichi la minore o la maggiore delle radici. Mentre per determinare singolarmente una soluzione della (10) occorre compiere un'operazione di estrazione di radice quadrata, la somma e il prodotto delle radici si determinano con sole operazioni algebriche a partire dai coefficienti (ricordiamo che abbiamo chiamato **operazioni algebriche**, in **Q** o in **R**, l'addizione, la moltiplicazione, le operazioni di «opposto» e di «reciproco»; queste operazioni vengono anche dette operazioni **razionali**).

Esempio: la somma delle radici dell'equazione $x^2 - 2x - 3 = 0$ è 2, il prodotto e -3. (Risolvere l'equazione e fare la verifica).

Le formule (13) e (14) ci offrono un metodo elegante per risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y = p \\ xy = q \end{cases} \tag{15}$$

L'idea è quella di pensare x ed y come soluzioni di una stessa equazione di secondo grado; se imponiamo che il coefficiente della seconda potenza sia uguale ad 1 (cosa che evidentemente è lecita), l'equazione si scrive immediatamente

$$t^2 - pt + q = 0 \tag{16}$$

Essa ha soluzione se è $p^2 - 4q \geq 0$: questa è dunque la condizione sotto cui il sistema (15) ammette soluzioni. Dette t_1 , t_2 le soluzioni dell'equazione (16), le soluzioni del sistema (15) sono le coppie (t_1 , t_2) , (t_2 , t_1).

Esempio. Di un rettangolo si conosce il perimetro, che è di 10 cm e l'area, che è di 6 cm^2; si vo-

gliono conoscere le misure dei lati. Indicando queste con x ed y, si ricava il sistema

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

L'equazione associata è $t^2 - 5t + 6 = 0$ che ha come soluzioni $2, 3$. Il nostro sistema ha le due soluzioni $(2, 3)$, $(3, 2)$ (che sono però indistinguibili dal punto di vista geometrico).

Il sistema (15) rientra fra i sistemi simmetrici; infatti, si dice sistema simmetrico nelle incognite x, y un sistema che viene trasformato in sé da una sostituzione $x \to y$, $y \to x$ nelle variabili.

(Ricordiamo i discorsi generali che abbiamo fatto sulla simmetria nel § 14.5). Naturalmente, se un sistema simmetrico ha una soluzione (x_o , y_o), esso ha anche la soluzione (y_o , x_o).

Fattorizzazione di un trinomio di secondo grado

b) Le formule (13) e (14) hanno molte importanti conseguenze: la prima è la fattorizzazione del trinomio $ax^2 + bx + c$, sempre nell'ipotesi che sia $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad (17)$$

Questa relazione, come ora dimostriamo, è una uguaglianza fra due espressioni algebriche, nella variabile x, e quindi è un'identità (cioè i due membri assumono il medesimo valore, qualsiasi valore venga dato ad x). La dimostrazione è una pura verifica:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

tenendo conto della (13) e della (14) si ha

$$a(x - x_1)(x - x_2) =$$

$$= ax^2 - a\left(-\frac{b}{a}\right)x + a\frac{c}{a} =$$

$$= ax^2 + bx + c$$

La formula (17) vale, naturalmente, anche nel caso in cui è $\Delta = 0$; in questo caso si ha $x_1 = x_2$. Si usa dire che in questo caso «si hanno due radici coincidenti»; questo modo di dire è inesatto. In realtà si ha una sola radice $\bar{x}$: nella fattorizzazione del trinomio, però, il polinomio di primo grado che corrisponde alla radice $\bar{x}$ compare al quadrato:

$$ax^2 + bx + c = a\ (x - \bar{x})^2$$

Facciamo ancora un'osservazione interessante; se un trinomio di secondo grado può essere fattorizzato nella maniera (17), esso si annulla certamente per $x = x_1$ ed $x = x_2$. Dunque se il trinomio $ax^2 + bx + c$ non si annulla per alcun valore di x (cosa che accade se e solo se il discriminante è negativo) *è impossibile fattorizzarlo* secondo la (17).

Segno di un trinomio di secondo grado

c) È facile ora studiare il segno di un trinomio di secondo grado: $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Supponiamo dapprima che sia $b^2 - 4ac > 0$. Allora vale la fattorizzazione (17), dove possiamo supporre che sia $x_1 < x_2$.

Consideriamo dapprima il caso $a > 0$. Evidentemente, si ha $ax^2 + bx + c > 0$ quando i due fattori $(x - x_1)$, $(x - x_2)$ sono entrambi positivi o entrambi negativi, cioè quando si ha $x > x_2$ oppure $x < x_1$.

(Teniamo presente che se è $x > x_2$, è, «a fortiori» $x > x_1$; analogamente, se è $x < x_1$ è, «a fortiori» $x < x_2$).

Risulta poi $ax^2 + bx + c < 0$ quando $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ hanno segno opposto, cioè si ha $x > x_1$,

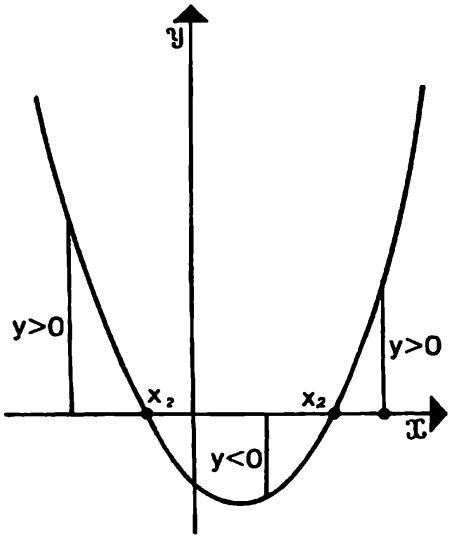


Fig. 12

$x_2 > x$. (Evidentemente, essendo $x_1 < x_2$, non può mai accadere che sia nello stesso tempo $x < x_1$, $x > x_2$).

Questi risultati sono espressi con evidenza dal grafico del nostro trinomio, cioè dalla parabola $y = ax^2 + bx + c$.

Se si suppone $a < 0$, la (17) ci dice che i segni si invertono, rispetto ai risultati della discussione precedente. Dunque: per $x < x_1$ il segno è negativo, per $x_1 < x < x_2$ il segno è positivo e per $x > x_2$ il segno è di nuovo negativo.

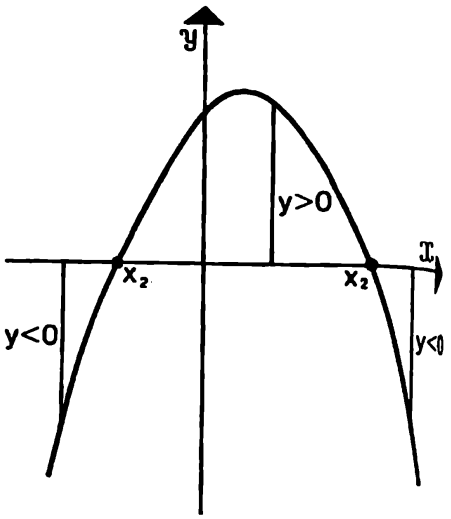


Fig. 13

Anche in questo caso l'esame della parabola $y = ax^2 + bx + c$ dà una completa evidenza alle nostre affermazioni.

Passiamo ora all'altro caso $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Dalla formula (8) otteniamo

$$ax^2 + bx + c = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right\}$$

Poiché l'espressione entro le graffe ha valore positivo per ogni valore di x, è evidente che il trinomio ha lo stesso segno di a; perciò:

Se $a > 0$ risulta $ax^2 + bx + c > 0$ qualunque sia x.
Se $a < 0$ risulta $ax^2 + bx + c < 0$ qualunque sia x.

Resta da considerare il caso $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Indicando con $\bar{x}$ l'unica radice, si ha dalla (15)

$$ax^2 + bx + c = a(x - \bar{x})^2$$

Perciò:

Se $a > 0$ si ha $ax^2 + bx + c \geq 0$ qualunque sia x; il trinomio assume valore positivo, eccetto che, ovviamente, in corrispondenza dell'unica radice.

Se è $a < 0$ si ha $ax^2 + bx + c \leq 0$ qualunque sia x ; il trinomio assume valori negativi eccetto che per l'unica radice.

Anche questi ulteriori risultati hanno una notevole evidenza geometrica (rivedere le figure 7, 5, 6).

Esempi. Vogliamo risolvere la disequazione $x^2 + x + 1 < 0$; il discriminante è negativo, il trinomio assume valore positivo qualunque sia x. Dunque l'insieme delle soluzioni è vuoto. Consideriamo ora la disequazione $x^2 - 5x + 6 \leq 0$; il discriminante del trinomio $x^2 - 5x + 6$ è $25 - 24 = 1$; le radici sono: 2 , 3. Il trinomio assume valore negativo all'interno dell'intervallo delle radici; perciò l'insieme delle soluzioni è l'intervallo $[2 , 3]$.

La « regola dei segni » di Cartesio

d) Premettiamo alcune osservazioni di carattere generale che riguardano la risoluzione di una qualsiasi equazione.

Il procedimento per la risoluzione di un'equazione può essere inteso e studiato a piú livelli.

Il livello piú grezzo consiste nel chiedersi se l'equazione ha soluzioni o no (per le equazioni di secondo grado l'esame del segno del discriminante permette di dare la risposta). Il livello piú esauriente consiste nel rappresentare le soluzioni con precisione mediante una formula (per le equazioni di secondo grado si raggiunge lo scopo mediante le formula risolutiva).

Si possono però porre dei quesiti di livello intermedio, in un certo senso. Ad esempio, possiamo domandarci: *ci sono soluzioni positive? soluzioni negative?* Naturalmente, calcolando le soluzioni con la formula risolutiva, si risponde anche a queste domande, ma l'interesse sta nel poter rispondere con operazioni piú semplici della completa risoluzione dell'equazione.

Nel caso delle equazioni di secondo grado, la «*regola dei segni*» di Cartesio soddisfa pienamente a questa esigenza.

Consideriamo un'equazione di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Supponiamo che sia $a > 0$ e che sia $\Delta = b^2 - 4ac > 0$: con ciò vi sono due soluzioni. Vediamo se il segno di b e di c permette di stabilire quante sono le soluzioni positive e quante le negative.

Anche per questo problema, occorre distinguere vari casi:

Sia $c > 0$. Tenendo conto che è $a > 0$, la formula (14) ci dice che le due radici sono entrambe positive o entrambe negative.

Quale dei due casi si verificherà? Ricordiamo che, per la formula (13), si ha

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Allora si hanno questi due sottocasi:

Se è $b > 0$ le radici sono entrambe negative.

Se è $b < 0$ le radici sono entrambe positive.

Sia $c < 0$. Per la formula (14) le radici sono di segno opposto; la nostra domanda ha trovato risposta. Possiamo tuttavia chiederci quale informazione si può trarre anche in questo caso dall'esame del segno di b, sempre utilizzando la formula $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

Si trova subito:

Se è $b > 0$ la somma delle radici $x_1 + x_2$ è negativa, quindi la radice negativa è prevalente in valore assoluto.

Se è $b < 0$ la somma delle radici è positiva, quindi prevale in valore assoluto la radice positiva.

I risultati trovati si possono comprendere nella seguente tabella:

	a	b	c	
1°	+	—	+	due radici positive
2°	+	+	+	due radici negative
3°	+	+	—	una radice $x_1 < 0$, una radice $x_2 > 0$, con $\lvert x_1 \rvert > \lvert x_2 \rvert$
4°	+	—	+	una radice $x_1 < 0$, una radice $x_2 > 0$, con $\lvert x_2 \rvert > \lvert x_1 \rvert$

Resta da considerare il caso $a < 0$; fortunatamente non c'è bisogno di rifare tutta la nostra casistica da capo. Basta riesporre i risultati della nostra tabella in modo da renderli applicabili anche a questo caso, come ora vediamo. Adottiamo una classica terminologia riguardo alla successione a , b , c dei coefficienti dell'equazione: se due coefficienti consecutivi hanno lo stesso segno diremo che vi è una « **permanenza** » se hanno segno opposto diremo che vi è una « **variazione** ». Ad esempio, l'equazione $2x^2 - 10x - 3 = 0$ presenta una variazione [data dalla coppia $(2 , -10)$] seguita da una permanenza [data dalla coppia $(-10 , -3)$]. Allora, la tabella trovata (valida nell'ipotesi $a > 0$, $\Delta > 0$) si può così formulare:

L'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, *con discriminante positivo, ha tante radici positive quante sono le varia-*

zioni dei suoi coefficienti; se le sue radici sono di segno contrario, è maggiore in valore assoluto quella positiva quando la variazione precede la permanenza, quella negativa in caso contrario.

Ora, se il coefficiente a è negativo, si può moltiplicare membro a membro l'equazione per -1, riducendosi così al caso precedente: con questa trasformazione tutti i coefficienti cambiano segno, ma le variazioni rimangono tali, e le permanenze rimangono tali. Pertanto, la «regola dei segni» nella forma enunciata rimane valida tale e quale.

L'ipotesi provvisoria $a > 0$ può essere senz'altro soppressa.

Esercizi

1 Scrivere un'equazione di secondo grado che abbia per radici le seguenti coppie di numeri:

$$(2, -1)\ ,\ (3, 6)\ ,\ (2-\sqrt{3}\ ,\ 2+\sqrt{3})\ ,\ \left(a, \frac{1}{a}\right)\ ,\ \left(\frac{1}{1-t}\ ,\ \frac{1}{1+t}\right)$$

2 Siano x_1 ed x_2 le radici dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$; calcolare senza risolvere l'equazione, le seguenti espressioni (che sono simmetriche nelle variabili x_1, x_2):

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\ ,\ (x_1 + x_2)^2\ ,\ x_1^2 + x_2^2\ ,\ (x_1 - x_2)^2\ ,\ \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$$

***3** Quale relazione deve sussistere fra p e q affinché la differenza tra le due radici dell'equazione $x^2 + px + q = 0$ sia, in valore assoluto, uguale a 2?

4 Nell'equazione $x^2 + 2mx + n^2 = 0$ i coefficienti m ed n sono interi compresi fra 1 e 6 che vengono assegnati a caso lanciando successivamente un dado. Quale è la probabilità che l'equazione abbia almeno una soluzione? Quale è la probabilità che ne abbia due?

5 Risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x + y = 2m \\ xy = m^2 - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 1 + \dfrac{b}{a} \\ xy = \dfrac{b}{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

(Per l'ultimo sistema occorre ingegnarsi un poco...).

6 Servendosi di una piccola calcolatrice (che eseguisca le radici quadrate) calcolare le soluzioni approssimate dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 0{,}1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 0{,}01 \end{cases}$$

* **7** Senza risolvere l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, scrivere l'equazione di secondo grado che ha per radici:

a) gli opposti dei valori delle radici dell'equazione data;
b) i reciproci dei valori delle radici dell'equazione data;
c) le radici dell'equazione data moltiplicate per un numero h;
d) le radici dell'equazione data aumentate di h.

8 Fattorizzare, ove possibile, i seguenti trinomi di secondo grado:

$3x^2 - 14x + 8$, $2x^2 - 3x + 4$, $25x^2 - 20x + 4$

9 Risolvere le seguenti disequazioni:

$x^2 - 2x - 1 > 0$, $6x - x^2 - 9 < 0$, $9x^2 + 24x + 16 > 0$

$(x-1)\ (x-2) \geqslant 3$, $\dfrac{x-1}{x^2} \leqslant 2$, $x\,(x+10) < 2x^2$

10 Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \leqslant 3 \quad , \quad \frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 + x + 1} \geqslant 0 \quad , \quad \frac{x}{x-1} < \frac{x}{x+1}$$

* **11** La «regola dei segni» permette di stabilire quante soluzioni di un'equazione di secondo grado sono positive.
Formulare una regola che permetta di stabilire quante sono le soluzioni maggiori di un numero a fissato. (Fare un cambiamento di incognita).

* **12** Data una parabola $\mathcal{P}$ di equazione $y = ax^2$, scrivere l'equazione della tangente $\mathcal{T}$ mandata da un suo punto $Q \leftrightarrow (\bar{x}\ ,\ \bar{y})$ (La tangente ad una parabola si può definire come una retta che ha un solo punto in comune con la parabola).
Trovare l'intersezione di $\mathcal{T}$ con l'asse $\mathfrak{X}$.
Dimostrare che la parabola si trova tutta in uno stesso semipiano rispetto a $\mathcal{T}$.
(Sarà interessante confrontare i risultati di questo esercizio con quelli — ottenuti per via sintetica — dell'esercizio 12 del § 18.1).

Cerchi e rette. La formula di Erone

18.4 *a*) Ora ci poniamo un problema semplice ma importante: dato nel piano cartesiano un cerchio di centro $Q \leftrightarrow (x_0\ ,\ y_0)$ e raggio r, vogliamo vedere se esso interseca l'asse $\mathfrak{X}$ e, in caso affermativo, vogliamo trovare le ascisse dei punti di intersezione.

I punti dell'asse $\mathfrak{X}$ sono caratterizzati dall'equazione $y = 0$; si tratta perciò di risolvere il sistema

$$\begin{cases}(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \\ y = 0\end{cases} \tag{18}$$

Sostituendo 0 ad y nella prima equazione, si ricava

$$(x - x_0)^2 = r^2 - y_0^2 \tag{19}$$

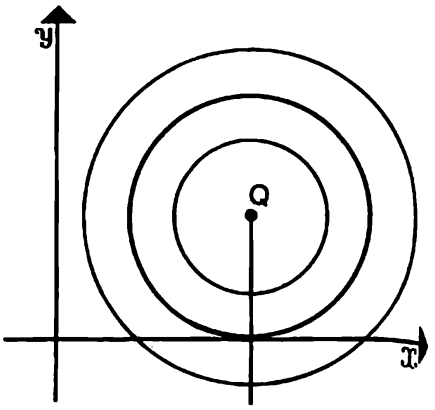


Fig. 14

Allora la risposta è chiara; se è $r^2 - y_0^2 > 0$, cioè $r^2 > y_0^2$, la (19) può essere verificata in questi due modi diversi:

$$x - x_0 = \sqrt{r^2 - y_0^2}$$
$$x - x_0 = -\sqrt{r^2 - y_0^2}$$

la (19) ha dunque le due soluzioni:

$$x_1 = x_0 + \sqrt{r^2 - y_0^2} \quad , \quad x_2 = x_0 - \sqrt{r^2 - y_0^2}$$

Se è $r^2 - y_0^2 < 0$ non vi possono essere soluzioni, dal momento che il primo membro della (19) non è negativo per alcun valore di x. Infine, se è $r^2 - y_0^2 = 0$; risulta $(x - x_0)^2 = 0$, cioè $x = x_0$, e questa è l'unica soluzione.

L'interpretazione geometrica di questi risultati è immediata: se è $r^2 > y_0^2$, cioè $r > |y_0|$, la distanza del centro dall'asse $\mathfrak{X}$ è minore del raggio: allora l'asse $\mathfrak{X}$ taglia la circonferenza in due punti (si dice che l'asse $\mathfrak{X}$ è *secante*).

Se è $r^2 < y_0^2$, cioè $r < |y_0|$, la distanza del centro dall'asse $\mathfrak{X}$ è maggiore del raggio e non vi sono intersezioni (si dice che l'asse $\mathfrak{X}$ è *esterna* al cerchio).

Se è $r^2 = y_o^2$, cioè $r = |y_o|$, la distanza del centro dall'asse $\mathfrak{X}$ è uguale al raggio: il cerchio e l'asse $\mathfrak{X}$ hanno un unico punto P in comune; il segmento $[P, Q]$ è perpendicolare all'asse $\mathfrak{X}$ (si dice che l'asse $\mathfrak{X}$ è *tangente* al cerchio).

Naturalmente, la risposta che abbiamo ottenuto vale per trovare l'intersezione di un qualsiasi cerchio con una qualsiasi retta: infatti ogni retta può essere presa come asse $\mathfrak{X}$. (*Il « metodo analitico » in geometria diventa molto agile se si tiene conto che gli assi cartesiani possono essere presi come fa comodo*).

Certamente, per risolvere un problema così semplice bastava applicare il teorema di Pitagora che abbiamo imparato nel cap. 15. Ma ora possiamo proseguire il discorso e fare altre osservazioni interessanti.

b) La (19) è un'equazione di secondo grado, che si può scrivere così:

$$x^2 - 2x_o\, x + x_o^2 + y_o^2 - r^2 = 0$$

Vediamo che cosa ci dicono le formule (13) e (14) trovate nel § precedente.

La prima ci dice che $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = x_o$, e questa è piuttosto scontata, se si riflette che x_o è l'ascissa del centro; la seconda è piú interessante:

$$x_1 \cdot x_2 = x_o^2 + y_o^2 - r^2$$

Ora $\sqrt{x_o^2 + y_o^2}$ è esattamente la distanza del centro del cerchio Q dall'origine; indicando con d questa distanza, si ha

$$x_1 \cdot x_2 = d^2 - r^2 \qquad (20)$$

Dunque il prodotto delle ascisse dei punti di intersezione dipende solo dalla distanza dell'origine O dal centro Q e dal raggio del cerchio:

se, tenendo fisso il punto O e il nostro cerchio, mandiamo un'altra retta che tagli il cerchio (poiché, come abbiamo detto, ogni retta può essere presa come asse $\mathfrak{X}$ di un riferimento cartesiano) *il prodotto delle ascisse dei due punti di intersezione rimane costante, essendo sempre uguale a* $d^2 - r^2$.

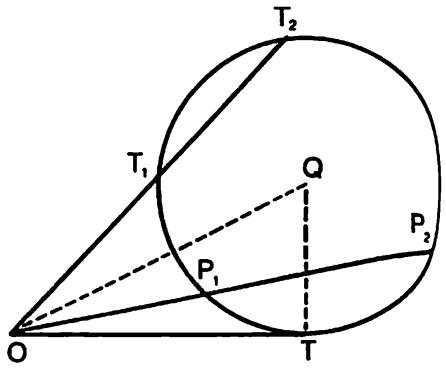


Fig. 15

Questa è una bella scoperta geometrica, che abbiamo fatto con metodi analitici.

Notiamo anche: il segno di $d^2 - r^2$ ha il suo significato: è positivo quando il punto O è *esterno* al cerchio, essendo $d > r$; in questo caso, i punti di intersezione P_1 , P_2 su una qualsiasi secante si trovano da una stessa parte rispetto al punto O. (Vedere la fig. 15). È negativo quando il punto O è *interno* al cerchio, essendo $d < r$; in questo caso P_1 e P_2 si trovano da parti opposte rispetto ad O. (Vedere la fig. 16). Naturalmente pensiamo che la retta secante sia orientata, ma la relazione (20) non dipende dal verso scelto: se si cambia verso sia x_1 che x_2 cambiano di segno.

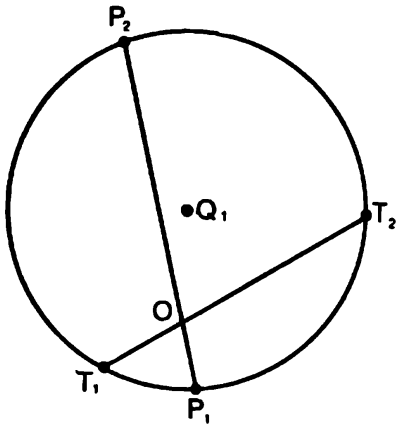


Fig. 16

Il numero $d^2 - r^2$ viene detto **potenza** del punto O rispetto al cerchio assegnato. Nel caso che O sia esterno al cerchio, il numero $d^2 - r^2$ ha un'interpretazione immediata; mandiamo da O una tangente al cerchio, e sia T il punto di tangenza (vedi figura 15). Allora dalla (20) (o dal teorema di Pitagora) ricaviamo

$$\overline{OT}^2 = d^2 - r^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{QT}^2$$

c) Un altro problema interessante è quello dell'intersezione di due cerchi. Esso è strettamente legato al problema di costruire un triangolo date le misure dei lati: a , b , c. Per risolverlo (secondo un procedimento ben noto) si prendono due punti

B e C tali che $\overline{BC} = a$ e si tracciano due cerchi di centri B e C, e raggi c e b, rispettivamente: il triangolo richiesto esiste se e soltanto se i due cerchi si intersecano fuori della retta BC (e allora si intersecano in due punti distinti: cosí si trovano due triangoli simmetrici rispetto alla retta $B\,C$). Nel cap. 14 (es. 3 a pag. 201) abbiamo già visto che i punti comuni di due cerchi (con centri distinti) possono essere due, uno o nessuno; ora si tratta di stabilire l'effettiva esistenza di due punti di intersezione.

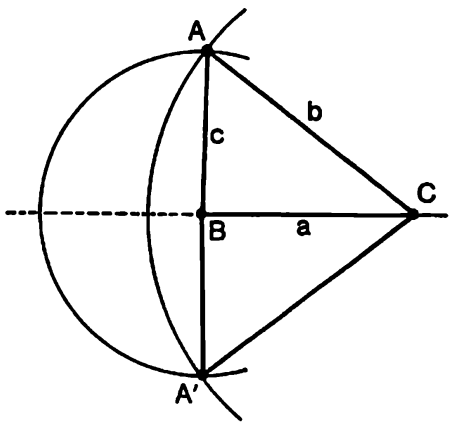


Fig. 17

Una condizione necessaria è che i numeri $a\,,\,b\,,\,c$ soddisfino alle tre condizioni volute dalla diseguaglianza triangolare

$$a < b + c \quad , \quad b < a + c \quad , \quad c < a + b \tag{21}$$

(Se una di queste tre relazioni valesse con il segno di uguaglianza in luogo del segno di disuguaglianza, i tre punti $A\,,\,B\,,\,C$ dovrebbero essere allineati e non formerebbero un triangolo secondo la nostra definizione; in un caso come questo si usa anche il termine « triangolo degenere »).

Introduciamo un riferimento cartesiano tale che l'asse $\mathfrak{X}$ contenga i punti B e C, e l'origine O sia il punto di mezzo del lato $B\,,\,C$. Si ha allora:

$$B \leftrightarrow \left(-\frac{a}{2}\,,\,0\right) \quad , \quad C \leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\,,\,0\right)$$

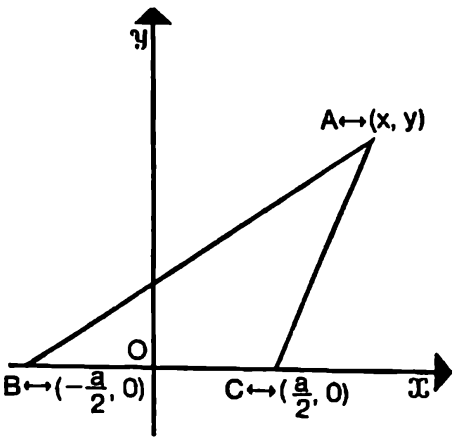


Fig. 18

Indichiamo con $(x\,,\,y)$ le coordinate del vertice incognito A. Allora le relazioni $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ si traducono nel sistema

$$\begin{cases} \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 = b^2 \\ \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 = c^2 \end{cases} \tag{22}$$

che si può scrivere

$$\begin{cases} x^2 - ax + \dfrac{a^2}{4} + y^2 = b^2 \\ x^2 + ax + \dfrac{a^2}{4} + y^2 = c^2 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro la prima equazione dalla seconda, si ha

$$2ax = c^2 - b^2$$

da cui

$$x = \frac{c^2 - b^2}{2a} \tag{23}$$

Sostituendo questo valore nella prima delle (22), si ottiene

$$y^2 = b^2 - \left(\frac{c^2 - b^2}{2a} - \frac{a}{2}\right)^2 =$$

$$= b^2 - \left(\frac{c^2 - b^2 - a^2}{2a}\right)^2 \tag{24}$$

Ricordando l'identità che permette di fattorizzare la differenza fra due quadrati, si ottiene

$$y^2 = \left(b + \frac{c^2 - b^2 - a^2}{2a}\right) \cdot \left(b - \frac{c^2 - b^2 - a^2}{2a}\right) =$$

$$= \frac{2ab + c^2 - b^2 - a^2}{2a} \cdot \frac{2ab - c^2 + b^2 + a^2}{2a} =$$

$$= \frac{c^2 - (a^2 - 2ab + b^2)}{2a} \cdot \frac{(a^2 + 2ab + b^2) - c^2}{2a} =$$

$$= \frac{c^2 - (a - b)^2}{2a} \cdot \frac{(a + b)^2 - c^2}{2a}$$

Notando che, nei numeratori, compaiono ancora differenze di quadrati, si ha infine

$$\gamma^2 = \frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)(a+b+c)}{4a^2} \tag{25}$$

Ed ecco un'interessante scoperta: le disuguaglianze (21) ci assicurano che tutte le espressioni entro parentesi a numeratore hanno valore positivo: cosí il secondo membro è positivo e il nostro problema ha certamente soluzione.

Per esprimere questa soluzione in modo elegante, si può introdurre il **semiperimetro** p del triangolo cercato:

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Allora si ha

$$b+c-a = a+b+c-2a = 2p-2a = 2(p-a)$$

Analogamente:

$$a+c-b = a+b+c-2b = 2p-2b = 2(p-b)$$
$$a+b-c = a+b+c-2c = 2p-2c = 2(p-c)$$

Sostituendo nella (25) si ricava

$$\gamma^2 = 4\,\frac{(p-a)(p-b)(p-c)\,p}{a^2}$$

Possiamo limitarci a considerare la soluzione positiva; prendendo dunque la radice quadrata del secondo membro si ha

$$y = 2\,\frac{\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}{a} \qquad (26)$$

Notiamo che y ci dà l'altezza del triangolo $A\,B\,C$. Siamo ora in grado di calcolare anche l'area del triangolo $A\,B\,C$; sappiamo che basta moltiplicare l'altezza per la base e dividere per due. Si ha:

$$\text{Area di } (A\,B\,C) = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} \qquad (27)$$

Questa è la celebre « formula di Erone » che esprime l'area di un qualsiasi triangolo partendo dalle misure dei lati.

Vogliamo aggiungere un piccolo commento: i calcoli con cui siamo arrivati alla formula di Erone sono effettivamente voluminosi, ma (se non ci illudiamo) essi non risultano del tutto sgradevoli perché hanno una loro evidente eleganza.

Esercizi

1 Dato nel piano cartesiano il cerchio di centro $Q \leftrightarrow (a\,,\,0)$ e di raggio r $(o < r < a)$, individuare mediante la pendenza p le rette passanti per l'origine che gli sono, secanti, tangenti, esterne.

2 Scrivere l'equazione del cerchio con centro nel punto $Q \leftrightarrow (3\,,\,4)$ e tangente all'asse y.

3 Scrivere l'equazione del cerchio con centro nel punto $Q \leftrightarrow (2\,,\,4)$ e tangente alla retta di equazione $y = \frac{1}{2}\,x$.

* **4** Dimostrare che l'insieme dei punti che hanno uguale potenza rispetto a due cerchi dati è una retta perpendicolare alla retta congiungente i due centri. (Prendere un opportuno riferimento cartesiano).

5 Un triangolo ABC è tale che $\overline{AB} = 180$, $\overline{AC} = 160$, $\overline{BC} = 300$.
Dimostrare che l'altezza mandata da A cade sul lato $[B\,.\,C]$.
Trovare la misura dell'altezza.
(Può essere interessante confrontare questa situazione con quella descritta nel-

l'esercizio 6 del § 13.1: allora potevamo disporre della sola disuguaglianza triangolare e non si potevano ottenere informazioni molto precise...).

6 Disponendo di un piccolo calcolatore, calcolare l'area dei triangoli, di cui sono assegnate le misure dei lati come segue:

(10 ; 8 ; 7) (10 ; 6 ; 5) (10 ; 5,02 ; 5,04)

Se si dispone di un calcolatore programmabile, programmare il calcolo della formula di Erone.

* **7** In un triangolo le misure dei lati opposti ai vertici A, B, C sono, rispettivamente, a , b , c . Esprimere la lunghezza della mediana mandata dal vertice A al lato opposto. (Come è noto, si chiama mediana il segmento congiungente il vertice di un triangolo con il punto di mezzo del lato opposto).

* **8** Di due forze, $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{v}$, applicate ad uno stesso punto, si conoscono le intensità $|\boldsymbol{t}| = 2$ kg, $|\boldsymbol{v}| = 5$ kg e si conosce l'intensità della risultante $|\boldsymbol{t} + \boldsymbol{v}| = 4$ kg. Si chiede di determinare $|\boldsymbol{t} - \boldsymbol{v}|$.

18.5 Ritorniamo all'equazione del cerchio di centro $Q \leftrightarrow (x_o , y_o)$ e raggio r: **L'equazione del cerchio in forma normale**

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2 \qquad (28)$$

Sviluppando e semplificando otteniamo

$$x^2 + y^2 - 2x_o\, x - 2y_o\, y + x_o^2 + y_o^2 - r^2 = 0$$

Dunque l'equazione del cerchio è della forma

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \qquad (29)$$

avendo posto

$$\alpha = -2x_o\ ,\ \beta = -2y_o\ ,\ \gamma = x_o^2 + y_o^2 - r^2 \qquad (30)$$

Diremo che la (29) è la **forma normale** dell'equazione del cerchio. Viene spontaneo di chiederci:

data una qualsiasi equazione della forma (29), possiamo affermare che essa rappresenti un cerchio?

Evidentemente, si tratta di passare dalla forma (29) alla (28): la (28) dice chiaramente che la distanza del punto variabile $P \leftrightarrow (x, y)$ dal punto $Q \leftrightarrow (x_0, y_0)$ è uguale ad r e perciò P descrive un cerchio con centro Q e raggio r.

Per passare dalla (29) alla (28) possiamo usare la tecnica del «completamento del quadrato», che già conosciamo; scrivendo

$$x^2 + \alpha x = \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4}$$

e, analogamente,

$$y^2 + \beta y = \left(x + \frac{\beta}{2}\right) - \frac{\beta^2}{4}$$

la (29) si trasforma così:

$$\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma}{4} \qquad (31)$$

Questa equazione è equivalente alla (29) ed è della forma (28): coincide con la (28) se si pone:

$$\begin{aligned} Q \leftrightarrow (x_0, y_0) &= \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right) \\ r^2 &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma}{4} \end{aligned} \qquad (32)$$

Però quest'ultima relazione sussiste solo se è $\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma > 0$, dal momento che r^2 è necessariamente un numero positivo. Possiamo allora distinguere tre casi:

I) $\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma > 0$

In questo caso la (29) rappresenta un cerchio con centro nel punto $Q \leftrightarrow \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right)$ e raggio $r = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma}$.

II) $\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma < 0$

In questo caso la (31) — e quindi la (29) — non può essere verificata da alcuna coppia (x, y) perché nella (31) il primo membro è necessariamente ≥ 0, mentre il secondo membro è negativo.

L'equazione (29), in questo caso, rappresenta ... l'insieme vuoto.

III) $\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma = 0$

L'unico punto che verifica l'equazione (29) è il punto $Q \leftrightarrow \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right)$. Infatti il secondo membro della (31) è nullo, e la somma di due quadrati è nulla solo quando essi sono entrambi nulli; allora: $x + \frac{\alpha}{2} = 0$, $y + \frac{\beta}{2} = 0$, cioè

$$x = -\frac{\alpha}{2} \ , \ y = -\frac{\beta}{2}$$

Un altro modo per passare dalla (29) alla (28) consiste nel cercare di determinare x_o, y_o, r, supponendo noti α, β, γ, in modo che valgano le (30). (Fare questi semplici calcoli per esercizio, e verificare che si ottengono i medesimi risultati di prima).

Esempi:

a) L'equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$ rappresenta un cerchio con centro nel punto $(1\,,\,0)$ e raggio 1.

Infatti, può essere scritta $(x^2 - 2x + 1) - 1 + y^2 = 0$, cioè $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

b) L'equazione $x^2 + y^2 + 2x + 8 = 0$ può essere scritta $(x^2 + 2x + 1) - 1 + y^2 + 8 = 0$, cioè $(x + 1)^2 + y^2 = -7$. È evidente che essa non ha soluzioni.

Per studiare questi esempi, si potevano naturalmente scrivere subito le formule (32), ma abbiamo preferito rifare ogni volta il calcolo.

È importante notare che vi possono essere equazioni di forma diversa dalla (29) che però si possono ricondurre alla (29). Ad esempio, l'equazione $3x^2 + 3y^2 + 6x + 1 = 0$, moltiplicando membro a membro per $\frac{1}{3}$, diventa

$$x^2 + y^2 + 2x + \frac{1}{3} = 0$$

Esercizi

1 Scrivere l'equazione del cerchio con centro nel punto $(2\,,\,3)$ e passante per l'origine; sviluppare e porre in forma normale.

2 Dati due cerchi mediante le equazioni in forma normale, come riconoscere se essi sono concentrici?

3 Per i cerchi rappresentati dalle seguenti equazioni trovare, senza fare calcoli, un asse di simmetria:

$x^2 + y^2 - x - 4 = 0$, $x^2 + y^2 + 3y - 10 = 0$, $x^2 + y^2 + x + y - 2 = 0$,

$x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$

4 Scrivere l'equazione del cerchio che passa per i tre seguenti punti (non allineati) assegnati nel piano cartesiano: $A \leftrightarrow (3\,,\,2)$, $B \leftrightarrow (4\,,\,2)$,

$O \leftrightarrow (0\,,\,0)$. (Conviene cercare l'equazione in forma normale: occorrerà determinare α, β, γ; uno di questi coefficienti è subito determinato ...).

5 Scrivere l'equazione del cerchio che passa per i punti $A \leftrightarrow (-1\,,\,-1)$, $B \leftrightarrow (3\,,\,2)$, $C \leftrightarrow (2\,,\,3)$. (Cercare l'equazione in forma normale; in questo caso si possono semplificare i calcoli tenendo presente che l'equazione deve avere una certa simmetria ...).

6 Scrivere l'equazione del cerchio passante per i punti $A \leftrightarrow (0\,,\,3)$ $B \leftrightarrow (3\,,\,2)$, $C \leftrightarrow (2\,,\,3)$.

7 Scrivere l'equazione del cerchio passante per i punti: $A \leftrightarrow (0\,,\,1)$, $B \leftrightarrow \left(4\,,\,\frac{3}{2}\right)$, $C \leftrightarrow (10\,,\,2)$. Calcolare il raggio e le coordinate del centro.

** **8** Nel piano riferito agli assi cartesiani siano dati tre punti: $A \leftrightarrow (x_1\,,\,y_1)$, $B \leftrightarrow (x_2\,,\,y_2)$, $C \leftrightarrow (x_3\,,\,y_3)$. Presa l'equazione del cerchio in forma normale, scrivere il sistema lineare che traduce il passaggio del cerchio per i punti A, B, C. Impostando la risoluzione del sistema con il metodo della triangolazione, fare vedere che il sistema ha soluzione se e solo se i punti A, B, C non sono allineati. (Cosa già nota per altra via).

9 Siano A, B, C tre punti non allineati aventi, in un assegnato sistema di riferimento cartesiano, tutte le coordinate razionali. Dimostrare che anche le coordinate del centro del cerchio passante per A, B, C sono razionali.

* **10** Dati due punti A, B, dimostrare che l'insieme dei punti P tali che $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = k$, essendo k una costante positiva diversa da 1, è un cerchio (che è detto cerchio di Apollonio). (Prendere un sistema di assi cartesiani tali che A e B siano sull'asse $\mathfrak{X}$ e siano simmetrici rispetto all'origine). Trovare poi le coordinate del centro.

L'iperbole equilatera e le lenti

18.6 Un'altra curva molto interessante è l'*iperbole equilatera*. La introduciamo partendo da questo problema del tutto elementare: individuare la relazione che sussiste fra le misure dei lati di un rettangolo perché l'area abbia un valore assegnato a. Dette x ed y le misure dei lati, la relazione che cerchiamo è

$$x\,y = a \qquad (33)$$

Estendiamo lo studio di questa relazione a tutto l'insieme $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, al di là del problema geome-

trico da cui siamo partiti, ma supponendo sempre $a > 0$. Se poniamo $x = 0$, non esiste alcun valore corrispondente di y per cui la relazione è vera; escluso questo valore di x, possiamo dividere membro a membro per x ottenendo:

$$y = \frac{a}{x} \tag{34}$$

Cosí, ad ogni $x \neq 0$ corrisponde un unico valore y per cui la relazione è soddisfatta; in altre parole, la nostra relazione è la funzione $x \longrightarrow \frac{a}{x}$, definita per $x \neq 0$.

Preso nel piano un riferimento cartesiano, chiamiamo **iperbole equilatera** * la curva che è grafico della funzione (34). Se supponiamo $a = 1$, la nostra non è altro che la funzione « reciproco » di cui abbiamo parlato fin dall'inizio del nostro studio dell'algebra.

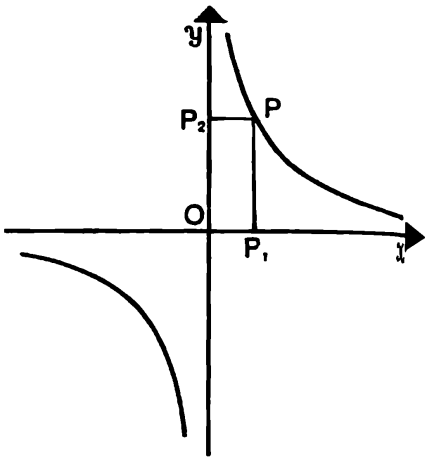


Fig. 19

È facile costruire per punti l'iperbole equilatera, dopo aver compilato una tabella di valori della funzione (34).

Lasciamo al lettore il piacere di scoprire le simmetrie di cui gode l'iperbole equilatera. Notiamo che se diamo ad x valori positivi sempre piú grandi le corrispondenti ordinate sulla curva $y = \frac{a}{x}$ diventano sempre piú piccole; viceversa, se diamo ad x valori positivi sempre piú piccoli, le corrispondenti ordinate crescono oltre ogni limite.

Ritornando al problema da cui siamo partiti, osserviamo che, preso un punto P sulla nostra curva e indicando con P_1 la sua proiezione sull'asse $\mathfrak{X}$,

* Per non dilungarci troppo, non riteniamo opportuno, per ora, definire l'iperbole in generale; perciò il termine « iperbole equilatera » va assunto globalmente.

con P_2 la sua proiezione sull'asse y, il rettangolo $OP_1\ PP_2$ (dove O è l'origine del riferimento cartesiano) ha un'area costante uguale ad a.

La funzione (34) esprime la ben nota «**legge della proporzionalità inversa**», che si applica in moltissime situazioni.

Ora vogliamo esporre un altro tipo di funzione che ha ugualmente come grafico un'iperbole equilatera e che trova applicazioni interessanti nello studio delle lenti.

Come si sa, una lente è un corpo trasparente limitato da superfici sferiche. Le proprietà che ora enunciamo valgono con ottima approssimazione per lenti abbastanza sottili; naturalmente, rimandiamo ai libri di fisica per le relative spiegazioni.

Anzitutto, una lente convessa fa convergere in un solo punto un fascio di raggi paralleli che arrivano perpendicolarmente alla lente. La distanza di questo punto dal centro della lente si dice *distanza focale*.

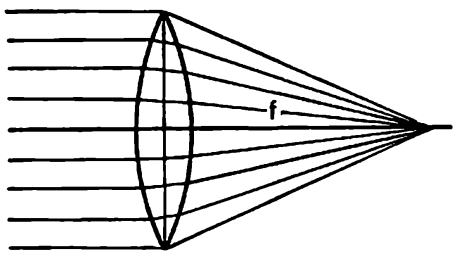


Fig. 20

Vale poi la seguente importante legge: se un punto luminoso P si trova su un piano che ha distanza x dal piano della lente, i raggi che escono da P vengono fatti convergere in un punto Q che si trova su un piano a distanza y dalla lente e fra x ed y sussiste la relazione

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{f} \qquad (35)$$

dove f è la distanza focale.

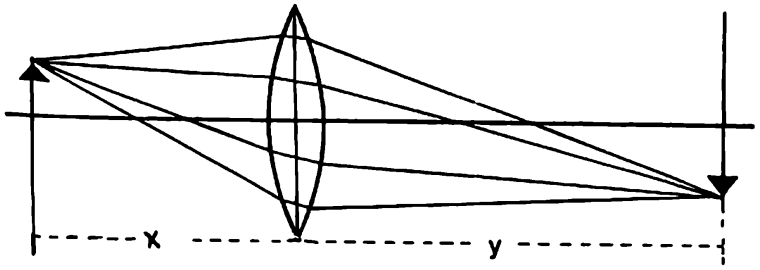


Fig. 21

Dalla (35) è facile ricavare y in funzione di x; ma è piú interessante porre la stessa relazione in una forma diversa che consenta di individuarne facilmente il grafico. Moltiplicando la (35) membro a membro per xyf si ottiene

$$fy + fx = xy$$

che si può scrivere

$$xy - fx - fy = 0$$

Il primo membro di questa equazione può essere fattorizzato a meno di una costante; infatti vale l'identità $(x-f)\cdot(y-f) = xy - fx - fy + f^2$. Tenendo conto di questa, la (35) equivale alla seguente relazione:

$$(x-f)\cdot(y-f) = f^2 \qquad (36)$$

Se ora poniamo

$$\begin{cases} x' = x - f \\ y' = y - f \end{cases} \qquad (37)$$

la (36) diventa

$$x'y' = f^2 \qquad (38)$$

Siamo ora in grado di trarre una conclusione in chiave geometrica: la traslazione (37) trasforma il grafico della relazione (35) in un'iperbole equilatera come quella che abbiamo studiato all'inizio di questo paragrafo (è la curva tratteggiata, nella figura qui accanto). Dunque, il grafico della relazione (35) è l'iperbole equilatera che si ottiene

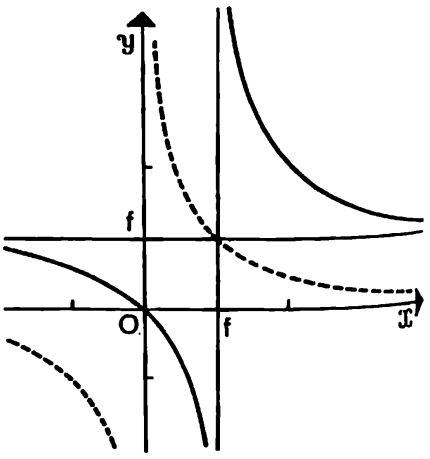


Fig. 22

da questa applicando la traslazione opposta della (37), cioè la traslazione

$$(x', y') \longrightarrow (x' + f, y' + f)$$

(Nella figura accanto, il grafico della (35) è segnato a tratto continuo).

La relazione (35) ha significato fisico anche quando x ed y sono negativi; peraltro, una completa discussione di questo significato esce dai limiti di questo corso.

Esercizi

1 Tracciare per punti, rispetto ad una stessa coppia di assi cartesiani, i grafici delle relazioni: $xy = \frac{1}{2}$, $xy = 2$, $xy = 4$.

2 Far vedere che anche per a negativo il grafico della relazione $xy = a$ è un'iperbole equilatera. E per $a = 0$ come è il grafico?

3 Preso un riferimento cartesiano, interpretare geometricamente il sistema (15) (§ 18.3 , *a*) e la sua condizione di risolubilità.

4 Interpretare geometricamente l'esercizio 6 del § 18.3.

5 Un banco ottico ha lunghezza l. A quale punto si deve porre una lente di lunghezza focale f perché mettendo una sorgente ad un estremo del banco l'immagine si formi nell'altro estremo? Sotto quali condizioni il problema ha soluzione?

6 Dati due numeri a, b si dice loro media aritmetica il numero $\frac{1}{2}(a + b)$; se essi sono positivi, si dice media geometrica il numero $\sqrt{ab}$. Dimostrare che, se a e b sono numeri positivi qualunque, la loro media aritmetica è $\geqslant$ della loro media geometrica.

* **7** Sia A l'insieme dei punti $P \leftrightarrow (x, y)$ *del primo quadrante* tali che $xy \geqslant a$ ($a > 0$). Dimostrare che se P_1 e P_2 stanno in A anche il punto di mezzo del segmento $[P_1, P_2]$ sta in A.

18.7 La risoluzione di un problema matematico può essere vista come un gioco in cui si

Con riga e compasso

fissano regole precise: sono consentite certe mosse, e non altre. I Greci furono i primi ad intendere cosí la risoluzione dei problemi. Essi avevano di mira soprattutto i problemi geometrici: la soluzione di questi problemi doveva consistere per loro nella costruzione di una certa figura, a partire dai dati, che erano assegnati in forma geometrica (punti, segmenti, ...). Ora, per i Greci *, non solo era prescritto che la costruzione doveva essere fatta per via puramente geometrica (quindi senza calcoli aritmetici), ma erano anche indicati in modo tassativo gli strumenti geometrici da impiegarsi: la **riga** (non graduata) e il **compasso**. Perché proprio questi? Evidentemente, perché la riga serve a tracciare le *rette* e il compasso a tracciare i *cerchi*: e per i Greci retta e cerchio erano figure perfette.

Effettivamente, ad un livello molto piú banale di quello dei Greci, possiamo osservare che per tracciare un cerchio abbiamo uno strumento semplice e preciso come il compasso, mentre, ad esempio, non c'è uno strumento altrettanto preciso e comodo per tracciare una parabola.

Le « regole del gioco » in geometria

I - Vediamo ora in modo piú preciso le « regole del gioco » fissate dai Greci.

Anzitutto i dati consistono in un insieme *finito* di punti (notiamo che un segmento si può pensare assegnato mediante i due estremi, un angolo mediante il vertice e due altri punti presi nei lati, un cerchio mediante il suo centro ed un suo punto, ecc.: dunque questa formulazione è sufficientemente generale). Le operazioni ammesse sono le seguenti:

1) *costruzione di una retta che passa per due punti;*
2) *costruzione di un cerchio con centro in un punto dato e passante per un altro punto dato;*

* O, piú esattamente, per quella corrente del pensiero matematico greco che trovò in Euclide il suo codificatore.

3) *intersezione di due rette;*
4) *intersezione di un cerchio con una retta;*
5) *intersezione di due cerchi.*

La risoluzione di un problema geometrico con riga e compasso deve consistere in una successione di mosse, scelte unicamente da questo elenco.

Esempi:

a) Data una retta $\mathcal{R}$ per mezzo di due suoi punti M, N, trovare il simmetrico di un punto P rispetto ad essa.

Tracciamo due cerchi, con centro in M ed N rispettivamente, passanti per P. L'ulteriore intersezione P' di questi due cerchi è il punto simmetrico di P rispetto ad $\mathcal{R}$.

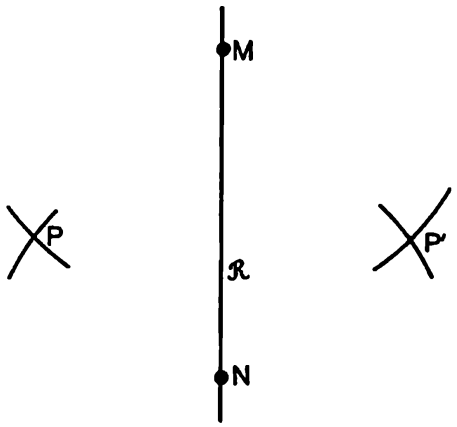


Fig. 23

b) In modo perfettamente analogo si possono fare con riga e compasso le seguenti costruzioni (che sono, del resto, ben note dai corsi di disegno): *trovare l'asse di un segmento, mandare per un punto di una retta la perpendicolare alla retta stessa, costruire la bisettrice di un angolo.*

c) Dato un angolo ($\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$) con vertice O, ed un punto P interno ad esso, mandare per P una retta che venga tagliata dai lati dell'angolo secondo due segmenti di uguale lunghezza.

Per intuire la soluzione, si tratta di pensare P come centro di un parallelogrammo avente un vertice in O e avente due lati consecutivi in $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$, rispettivamente.

Le operazioni da farsi sono dunque queste: trovare il punto O' simmetrico di O rispetto al centro P, quindi trovare la semiretta $\mathcal{R}'$ simmetrica di $\mathcal{R}$ rispetto al centro P (ciò che si ottiene trovando il simmetrico rispetto a P di un qualunque punto T di $\mathcal{R}$ diverso da O). La semiretta $\mathcal{R}'$ interseca $\mathcal{S}$ in un punto M. La retta $P\,M$ è la retta cercata perché essa interseca la semiretta $\mathcal{R}$ in un punto M'

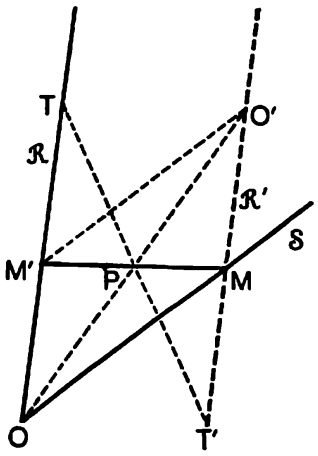


Fig. 24

che è simmetrico di M rispetto a P ed è perciò tale che $\overline{PM} = \overline{PM'}$.

Dunque, le operazioni necessarie sono: mandare rette per due punti, intersecare rette e trovare il simmetrico di un punto rispetto ad un punto: ciò che si può banalmente fare con riga e compasso. Abbiamo anche riscontrato, nel corso di questo problema, che si può fare con riga e compasso la seguente costruzione: *mandare da un punto la parallela ad una retta assegnata.*

Facciamo ancora un'osservazione: *dato un segmento* $[A, B]$, *possiamo costruire con riga e compasso un nuovo segmento che abbia uguale lunghezza e che abbia un estremo coincidente con un qualsiasi punto* A' *fissato*: infatti, con una simmetria centrale (o con una simmetria assiale) è possibile portare A a coincidere con A'; il punto B allora andrà a finire in un punto B' tale che $\overline{A'B'} = \overline{AB}$. In questo modo possiamo allargare l'impiego del compasso: oltre a costruire un cerchio con centro in un punto dato e passante per un punto dato, *possiamo costruire un cerchio con centro dato e avente raggio di lunghezza uguale ad un segmento dato:* basta infatti trasportare questo segmento in modo che un suo estremo venga a coincidere con il punto che è stato prescritto come centro.

d) Dato un cerchio ed un punto P ad esso esterno, mandare le tangenti da P al cerchio.

Saremmo tentati di fissare un bordo della riga in P e di cercare poi di ruotare la riga fino a renderla tangente al cerchio. Questo tipo di costruzione si può fare con notevole precisione: tuttavia non è accettabile perché essa violerebbe le regole del gioco. Infatti, possiamo utilizzare la riga per tracciare una retta soltanto congiungendo due punti! È necessario dunque, nel nostro caso, procurarci i punti di tangenza. La cosa non è difficile ricordando che, se Q è il punto di tangenza ed O è il centro del cerchio, la retta tangente PQ e la retta OQ sono perpendicolari.

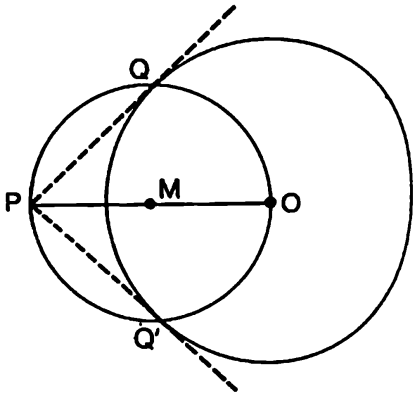


Fig 25

Dunque il triangolo OQP è rettangolo in Q. Ma sappiamo che i vertici di un triangolo rettangolo hanno uguale distanza dal punto di mezzo dell'ipotenusa (vedere esercizio 6 del § 15.3): in altre parole, se il triangolo OQP è rettangolo in Q, il vertice Q sta su un cerchio di cui $[O, P]$ è un diametro: viceversa, se questo accade, il triangolo è rettangolo in Q. Ciò consente di completare facilmente la nostra costruzione: basta costruire un cerchio che ha centro nel punto di mezzo del segmento $[P, O]$ e passa per P (o per O), cosa che si può fare con riga e compasso. Le intersezioni di questo cerchio col cerchio assegnato ci danno i punti di tangenza Q e Q'.

Dalle operazioni geometriche alle operazioni algebriche

II - Abbiamo detto ripetutamente che l'introduzione degli assi cartesiani nel piano crea una traduzione dal linguaggio della geometria (punto, retta, semiretta, semipiano, cerchio, ...) a quello dell'algebra (coppia di numeri reali, equazioni lineari, disequazioni, equazione normale del cerchio, ...). In questa traduzione, come si trasformano le costruzioni con riga e compasso che abbiamo ora studiato? Sappiamo scrivere senza difficoltà l'equazione della retta che passa per due punti (Cfr. § 17.2): *i coefficienti dell'equazione si ottengono dalle coordinate dei punti mediante operazioni algebriche (cioè mediante le operazioni di addizione, di moltiplicazione, di «opposto» e di «reciproco»)*: diciamo, brevemente, che si ottengono *razionalmente* dalle coordinate dei punti. Lo stesso accade per l'equazione normale del cerchio con centro in un punto assegnato e passante per un altro punto: anche in questo caso i coefficienti si esprimono razionalmente mediante le coordinate dei due punti interessati. (Fare esplicitamente la verifica!). L'intersezione di due rette (non parallele!) si traduce nella risoluzione di un sistema lineare, che si fa operando razionalmente sui coefficienti. Dunque, le prime tre operazioni geometriche del nostro elenco si trasformano in operazioni razionali fatte sulle coordinate dei punti assegnati. Invece le altre due operazioni geometriche (intersezione di un cerchio e di una retta,

intersezione di due cerchi) ci conducono alla risoluzione di sistemi di questo tipo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ ax + by = c \end{cases}$$

(con a, b non entrambi nulli)

o, rispettivamente,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ x^2 + y^2 + \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0 \end{cases}$$

Ma, a loro volta, questi sistemi si riducono ad un'equazione di secondo grado: infatti, nel primo caso basta sostituire nella prima equazione (supponendo, ad esempio $b \neq 0$) l'espressione di y fornita dalla seconda; si ottiene

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{b} x + c \\ x^2 + \left(-\frac{a}{b} x + c\right)^2 + \alpha x + \beta \left(-\frac{a}{b} x + c\right) + \\ \quad + \gamma = 0 \end{cases}$$

È evidente che quest'ultima equazione è di secondo grado.

Nel secondo caso, si ottiene un sistema equivalente sostituendo alla seconda equazione la differenza membro a membro delle due equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ (\alpha - \alpha') x + (\beta - \beta') y + (\gamma - \gamma') = 0 \end{cases}$$

Siamo dunque ricondotti al caso precedente.*

* A proposito, vogliamo raccontare una vecchia barzelletta. Un

Poiché le equazioni di secondo grado si risolvono mediante operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate (ricordare la formula risolutiva!) possiamo concludere cosí:

Attraverso l'impiego di coordinate cartesiane, ogni problema di geometria piana risolubile con riga e compasso si traduce in un problema che si può risolvere, a partire dalle coordinate dei punti dati, mediante operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate.

Naturalmente, per risolvere un problema potranno occorrere diverse estrazioni di radici quadrate, eventualmente da eseguirsi successivamente, come, ad esempio, nell'espressione $\sqrt{a^2 + \sqrt{b \cdot c^3}}$.

Dalle operazioni algebriche alle operazioni geometriche

III - Viceversa, consideriamo un problema algebrico che si risolva mediante una catena di operazioni razionali e di estrazioni di radici quadrate.

Possiamo pensare che il procedimento di soluzione del nostro problema sia descritto da un grafo di calcolo del tutto simile a quelli che abbiamo studiato nel cap. 9, con la sola aggiunta di una nuova operazione avente un solo canale d'ingresso: l'operazione di radice quadrata. Questa operazione, naturalmente, può comparire piú volte. Allora ci chiediamo: *introdotto un riferimento cartesiano*, il nostro calcolo può essere rappresentato da una costruzione geometrica «con riga e compasso»? *Occorre ammettere che siamo in grado di individuare il punto* $Q \leftrightarrow (1, 0)$ *e che i dati del nostro problema algebrico sono ascisse di punti dell'asse* $\mathfrak{X}$, *che abbiamo diritto di ritenere noti.*

Matematico sta spiegando ad un Fisico come si fa per fare la polenta. «Si prende un paiolo di rame, lo si riempie d'acqua, lo si mette sul fuoco, ecc.». Il Fisico interrompe: «E se il paiolo è già pieno d'acqua?...». Il Matematico rimane interdetto; si concentra e poi, dopo cinque minuti di riflessione, dà la risposta: «Si vuota il paiolo, e si è ricondotti al caso precedente...».

Con queste precisazioni, la risposta alla nostra domanda è affermativa: cioè siamo in grado di compiere con riga e compasso delle costruzioni geometriche che traducono le singole operazioni del nostro calcolo: alla fine otterremo un punto dell'asse $\mathfrak{X}$ la cui ascissa rappresenta il risultato. Basta dunque vedere come si traducono le singole operazioni algebriche e l'estrazione della radice quadrata.

1) *Addizione* $(x_1 , x_2) \longrightarrow x_1 + x_2$

Una costruzione che serve allo scopo è quella del « doppio parallelogrammo », che abbiamo già conosciuto (Cfr. § 16.2).

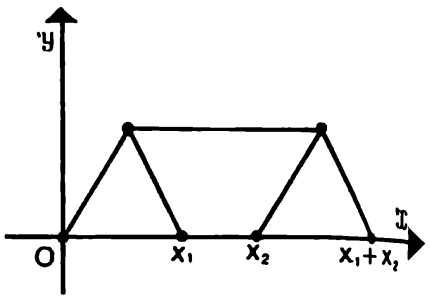


Fig. 26

2) « *Opposto* » $x \longrightarrow x$

La sua traduzione è immediata: basta fare una simmetria rispetto all'origine.

3) *Moltiplicazione* $(x_1 , x_2) \longrightarrow x_1 \cdot x_2$

Anche per la moltiplicazione si possono trovare varie costruzioni. Ne proponiamo una che utilizza l'importante proprietà messa in evidenza nel § 18.4: *dato un cerchio ed un punto O, e mandata da questo una qualsiasi secante al cerchio, il prodotto delle ascisse dei due punti di intersezione, prendendo O come origine, rimane costante* [formula (20)].

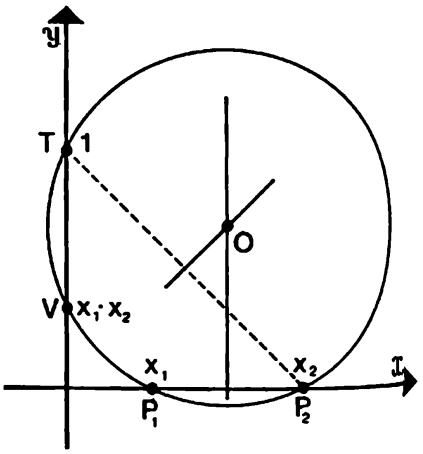


Fig. 27

Prendiamo dunque sull'asse $\mathfrak{X}$ i punti P_1 , P_2 di ascisse x_1 ed x_2, rispettivamente. Consideriamo poi il punto $T \leftrightarrow (0 , 1)$.

Il cerchio per i punti P_1 , P_2 , T (che si costruisce facilmente con riga e compasso) taglia l'asse $\mathfrak{Y}$ in un punto V di ordinata y tale che $x_1 \cdot x_2 = y \cdot 1$; dunque è $y = x_1 \cdot x_2$. Naturalmente, il risultato può essere trasferito sull'asse $\mathfrak{X}$.

4) « *Reciproco* » $x \longrightarrow \dfrac{1}{x} \quad (x \neq 0)$

Possiamo usare la stessa proprietà che abbiamo impiegato nella costruzione precedente.

Preso il punto $P \leftrightarrow (x, 0)$, costruiamo il cerchio passante per P e tangente all'asse $\mathfrak{y}$ nel punto $T \leftrightarrow (0, 1)$. Esso taglia l'asse $\mathfrak{x}$ in un ulteriore punto Q di ascissa s tale che $s \cdot x = 1$; perciò

$$s = \frac{1}{x}$$

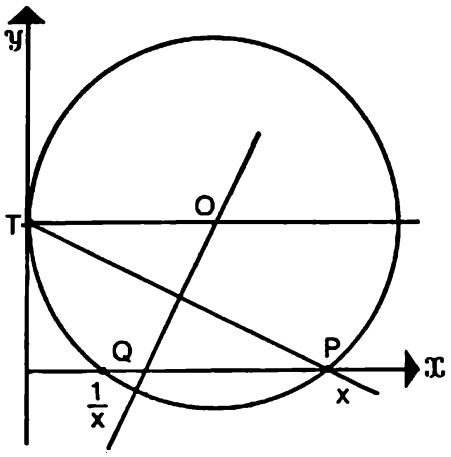


Fig. 28

5) *Radice quadrata* $x \longrightarrow \sqrt{x} \quad (x \geqslant 0)$

Fra le innumerevoli costruzioni possibili, possiamo impiegarne una che utilizza ancora la proprietà delle secanti e delle tangenti di un cerchio.

Consideriamo i punti dell'asse $\mathfrak{y}$: $T \leftrightarrow (0, 1)$ e $P \leftrightarrow (0, x)$. Costruiamo il cerchio passante per questi punti e tangenti all'asse $\mathfrak{x}$ *; sia $Q \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (s, 0)$ il punto di tangenza.

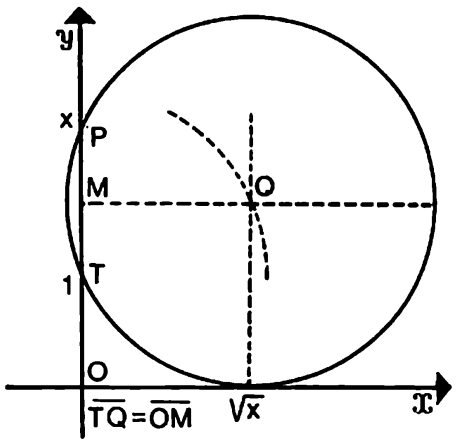


Fig. 29

Si ha $s^2 = x \cdot 1$, cioè $s = \sqrt{x}$. Si ottiene così un punto che ha l'ascissa uguale al valore desiderato.

Le costruzioni geometriche che abbiamo dato per ogni singola operazione ci offrono una regola automatica per tradurre in termini geometrici un calcolo che si basi solo sulle operazioni algebriche e sull'estrazione di radici quadrate. In molti casi, però è possibile ottenere questa traduzione in modo più diretto e più espressivo.

Ad esempio, ritorniamo al problema del calcolo della parte aurea di un segmento di lunghezza l (§ 18.2). Abbiamo trovato l'equazione

$$x^2 + lx - l^2 = 0$$

* Evidentemente, il suo raggio sarà uguale ad OM, essendo M il punto medio del segmento $[P, T]$.

Ora, questa equazione si può vedere come l'equazione che rappresenta l'insieme intersezione del cerchio

$$x^2 + y^2 + lx - l^2 = 0$$

con l'asse $\mathfrak{x}$. L'equazione del cerchio si può scrivere in forma piú espressiva cosí:

$$\left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{l^2}{4} + l^2$$

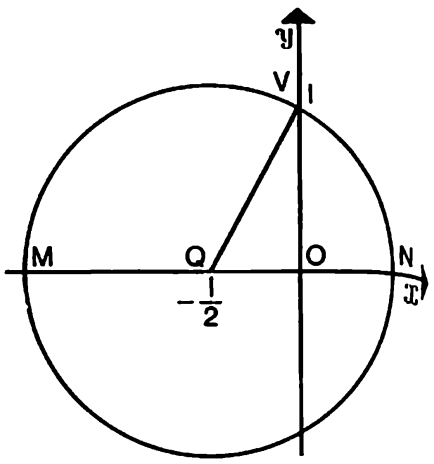


Fig. 30

Le coordinate del centro sono allora $\left(-\frac{l}{2}\ ,\ 0\right)$.

Il raggio è $r = \sqrt{\frac{l^2}{4} + l^2}$ e può essere ottenuto come ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha i cateti di lunghezza $\frac{l}{2}$ ed l. La costruzione è allora ovvia: si tratta di tracciare il cerchio che ha il centro in $Q \leftrightarrow \left(-\frac{l}{2}\ ,\ 0\right)$ e che passa per il punto $V \leftrightarrow (0\ ,\ l)$.

Le intersezioni M, N di questo cerchio con l'asse $\mathfrak{x}$ forniscono la rappresentazione delle due soluzioni dell'equazione assegnata. La parte aurea è rappresentata, come sappiamo, dalla soluzione positiva. Dunque la parte aurea di l è $\overline{ON}$.

Osserviamo infine che per la traduzione di formule algebriche in costruzioni geometriche, spesso potrà essere conveniente utilizzare teoremi di geometria diversi da quelli impiegati nelle costruzioni 1, ..., 5 esposte sopra. Ad esempio, potrà essere vantaggioso il ricorso al teorema di Pitagora, alle formule che esprimono l'area del triangolo, del rettangolo, ecc.

IV - Abbiamo così concluso il nostro esame dei problemi geometrici che si risolvono con riga e compasso, e dei problemi algebrici ad essi collegati. Una domanda che viene spontanea è questa: tutti i problemi di geometria si possono risolvere con riga e compasso?

Furono i Greci a constatare che alcuni problemi resistevano a tutti i tentativi di soluzione con questi strumenti tradizionali. Alcuni di questi problemi divennero così famosi che si formarono persino delle leggende. Celebre quella di Delo: l'oracolo aveva detto «Raddoppiate l'altare!»: si trattava di un altare di forma cubica. Fu costruito un altare di lato doppio, ma l'oracolo si dichiarò insoddisfatto. Era chiaro che «raddoppiare l'altare» significava raddoppiare il volume, mentre raddoppiando il lato il volume sarebbe stato moltiplicato per 8. Dunque, occorreva risolvere l'equazione

$$x^3 = 2l^3$$

ovvero, partendo dal lato di lunghezza l, costruire il nuovo lato di lunghezza $x = \sqrt[3]{2}l$. I matematici greci tentarono invano di risolvere questo problema con riga e compasso, finché qualcuno (Nicomede, Diocle) lo risolse, però utilizzando strumenti diversi dalla riga e dal compasso.

Oggi noi sappiamo che questo problema (assieme ad altri celebri problemi dell'antichità) non si può risolvere con riga e compasso. Ma allora: è utile accanirsi a cercare di risolvere problemi con strumenti volutamente poveri? Possiamo rispondere che è certamente utile: infatti la scarsità degli strumenti a nostra disposizione può stimolare la nostra intelligenza e la nostra fantasia. È certamente importante, ad esempio, imparare a utilizzare al massimo le risorse di uno strumento di calcolo. (Notiamo, per inciso, che molte piccole calcolatrici tascabili consentono di svolgere esattamente le operazioni corrispondenti al livello «riga e

compasso»: cioè operazioni algebriche ed estrazioni di radici quadrate).

Ma ci sono delle ragioni piú profonde per l'utilità di questi problemi: attraverso il loro studio, i matematici hanno approfondito lo studio dell'algebra e sono arrivati a classificare i vari strumenti matematici. In molti casi hanno trovato delle «dimostrazioni di impossibilità» che, se da un certo punto di vista possono apparire deludenti, in realtà sono tra le piú grandi conquiste della scienza.

Vocaboli, simboli, formule

Fuoco, direttrice, vertice, asse (di una **parabola**)

Trinomio di secondo grado: $ax^2 + bx + c$

Rappresentazione cartesiana di una **parabola** *con asse parallelo all'asse* $\mathcal{Y}$: $y = ax^2 + bx + c$. Coordinate del vertice: $\left(-\frac{b}{2a} , -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

Discriminante dell'equazione $ax^2 + bx + c = o$: $\Delta = b^2 - 4ac$

Rappresentazione delle radici:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fattorizzazione di un trinomio $ax^2 + bx + c$ avente radici x_1 , x_2 : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Relazioni fra radici e coefficienti

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Variazioni, permanenze (a proposito della «**regola dei segni**»)

Formula di Erone per l'area di un triangolo ABC: *Area* di $(ABC) = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$ (a , b , c, lunghezza dei lati, p semiperimetro del triangolo)

Forma normale dell'equazione del cerchio: $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$

discussione di un problema
rapporto aureo, parte aurea
operazioni algebriche (o **razionali**)
iperbole equilatera

Esercizi

1 Data una retta $\mathcal{R}$ e dati due punti A , A', non appartenenti ad $\mathcal{R}$, che si corrispondono nella simmetria di asse $\mathcal{R}$, costruire, con l'impiego della sola riga il corrispondente di un qualsiasi punto P.
(Questo problema è analogo del problema 1 del § 14.2).

2 Costruire un triangolo ABC, dati $\overline{BC}$, l'altezza e la mediana mandate da A.
(Possiamo pensare che siano assegnati tre segmenti, che esprimono le tre misure date; dare una soluzione sintetica e dire come devono essere i dati perché il problema abbia soluzione).

* **3** Costruire un triangolo ABC, dati: l'angolo in B, $\overline{BC}$ e $\overline{AB} + \overline{AC}$.
(Possiamo pensare che siano assegnati l'angolo in B, due segmenti esprimenti $\overline{BC}$ e $\overline{AB} + \overline{BC}$, rispettivamente; dare la soluzione sintetica e dire come devono essere i dati perché il problema abbia soluzione).

* **4** Costruire con riga e compasso un triangolo isoscele dati il perimetro $2p$ e l'altezza h.

** **5** È dato un triangolo, con i lati di lunghezza a , b , c ($a < b < c$). Togliere da ciascun lato un segmento di lunghezza x, in modo da ottenere un triangolo rettangolo. (Dare una soluzione per via algebrica; non è difficile scrivere l'equazione, ma occorre tenere presente che le soluzioni accettabili sono quelle per cui $0 < x < a$; si richiede una certa capacità di esprimere i risultati dei calcoli nella forma piú significativa).

6 Dati quattro segmenti, di lunghezza l , m , n , s , costruire un segmento di lunghezza x, con:

$$x = \sqrt{l^2 + m^2} \quad , \quad x = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \quad , \quad x = \sqrt{l^2 + m^2 - n^2}$$

$$x = \sqrt{l^2 + m^2 - n^2 - s^2}$$

$$x = \frac{lm}{l + m} \quad , \quad x = \frac{l^2 + m^2}{s}$$

7 Dato un angolo, costruire un cerchio di raggio r assegnato, tangente ai due lati dell'angolo. Dare anche una soluzione analitica, prendendo in modo opportuno gli assi cartesiani.

* **8** Costruire un cerchio passante per due punti dati e tangente ad una retta

data. (Naturalmente, si chiede di stabilire in quali casi vi sono soluzioni, e quante sono).

** **9** Costruire un cerchio passante per due punti dati e tangente ad un cerchio dato. (Anche per questo problema si tratta di vedere se vi sono soluzioni, e quante).

19

Aritmetica ed algebra

Divisibilità dei numeri primi

19.1 Può sembrare inutile e noioso ritornare sulla successione degli **interi naturali**: 0, 1, 2, 3, ..., che conosciamo fin dalle scuole elementari. Eppure il campo degli interi è affascinante: nel corso di questo capitolo constateremo che l'aritmetica, malgrado il suo aspetto cosí familiare, ci riserva una grande quantità di problemi e di scoperte interessanti. L'importante è saper guardare anche le cose piú consuete con occhi attenti...

Cominciamo con un po' di revisione del nostro linguaggio. Siano a e b interi; a si dice **multiplo** di b se esiste un intero c tale che $a = b \cdot c$. La stessa relazione fra a e b si può esprimere dicendo che b è un **divisore** di a (ovvero b **divide** a). Ad esempio è la stessa cosa dire «12 è multiplo di 3» oppure «3 divide 12».

Invitiamo il lettore a dimostrare da sé, con perfetta chiarezza, le seguenti affermazioni:

— Se d divide a e divide b, allora divide $a + b$.

— Se d divide a, allora divide $a \cdot c$, dove c è un intero qualsiasi.

— Se d divide a ed a divide b, allora d divide b.

Conosciamo già la definizione di numero primo: *si dice* **primo** *un intero maggiore di* 1 *che è divisibile solo per se stesso e per* 1. (Ci sono motivi di carattere tecnico per cui non è opportuno mettere il nu-

mero 1 fra i numeri primi). Ad esempio, 7 è un numero primo perché i suoi unici divisori sono 1 e 7, mentre 51 non è un numero primo perché risulta $51 = 17 \cdot 3$.

Un numero $x > 1$ si dice **composto** se non è primo; cioè se si può scrivere $x = a \cdot b$, dove a e b sono entrambi > 1. Se a, a sua volta, è composto, la scomposizione può proseguire; cosí pure si può fare eventualmente per b. Dopo un certo numero di scomposizioni di questo tipo, si rappresenta il numero x come prodotto di fattori tutti primi, eventualmente ripetuti. Questa scomposizione può essere espressa con un grafo, di evidente significato. (Si tratta di una specie di grafo di calcolo, con sole moltiplicazioni, eseguito però a ritroso). Nei vertici finali del nostro grafo troviamo numeri non piú scomponibili, cioè numeri primi.

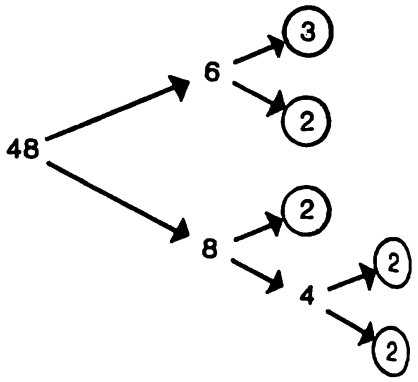


Fig. 1

La scomposizione si può fare, in generale, in modi diversi, ma il risultato finale è il medesimo, nel senso che i fattori primi sono i medesimi e compaiono uno stesso numero di volte; ad es. $48 = 3 \cdot 2^4$. Effettivamente, per gli interi naturali vale la proprietà della **fattorizzazione unica**, che si può esprimere cosí: ogni intero naturale maggiore di 1 si può esprimere come prodotto di numeri primi *in un solo modo*, prescindendo dall'ordine in cui i fattori compaiono. Questo risultato è intuitivo (almeno per chi ha acquistato un po' di familiarità con il calcolo: viene spontaneo pensare i numeri primi un po' come atomi di una molecola); tuttavia non è del tutto facile da dimostrarsi.

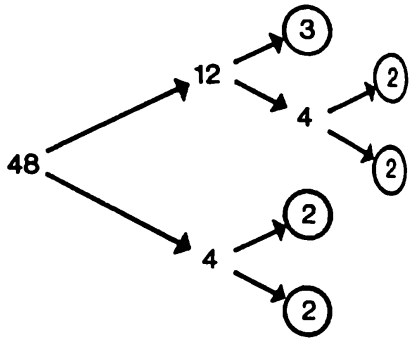


Fig. 2

È noto anche dall'antichità un modo intelligente per determinare successivamente i numeri primi: il famoso «**crivello di Eratostene**». Vediamo di che cosa si tratta. Supponiamo di voler compilare la lista dei numeri primi non superiori a 100. Cominciamo allora facendo l'elenco dei numeri compresi fra 2 e 100.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Fissiamo l'attenzione sul 2 e cancelliamo dalla nostra lista tutti i suoi multipli, escluso il 2: è chiaro che i numeri cancellati sono tutti composti. Passiamo ora al numero successivo, cioè al 3 e cancelliamo dalla lista i suoi multipli (lui escluso). Cosí proseguiamo, naturalmente tralasciando i numeri già cancellati, che sono tutti composti. Evidentemente i numeri su cui fissiamo successivamente la nostra attenzione: 2, 3, 5, 7, ... sono tutti primi perché non compaiono fra i multipli di numeri inferiori; ma l'aspetto piú intelligente del metodo del crivello sta nella seguente osservazione: basta attuare il procedimento indicato solo fra i numeri non superiori a 10 (basta dunque arrestarsi al 7) per avere la certezza che tutti i numeri non cancellati sono primi. Infatti un numero non superiore a 100 se è composto è certamente divisibile per un numero non superiore a 10; quindi, avendo cancellato i multipli propri * dei numeri non superiori a 10 (o, nel nostro caso, i multipli dei numeri primi non superiori a 10), siamo certi di aver cancellato tutti i numeri composti presenti nella nostra lista.

Questa osservazione ha, naturalmente, una portata generale: per trovare i numeri primi non superiori ad N basta cancellare i multipli propri dei numeri il cui quadrato non supera N.

* Chiamiamo multiplo *proprio* di a un multiplo di a diverso da a e da 0.

Esercizi

1 Dimostrare che se n è multiplo di 3, il numero $(n+1)^3 - 1$ è divisibile per 9.

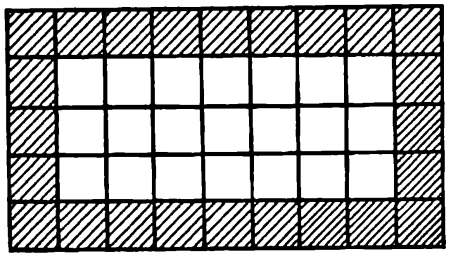
2 Si consideri un numero di due cifre (scritto nella numerazione decimale) e il numero che si ottiene scambiando fra loro le due cifre. Dimostrare che la differenza fra i quadrati di questi due numeri è divisibile per 9, per 11, per la somma delle cifre, per la differenza delle cifre.

* **3** Per quali valori interi di a il numero $5a^3 + a^2 + a + 6$ è divisibile per a?

4 La differenza delle quarte potenze di due interi naturali può essere un numero primo?

** **5** Per quali valori dell'intero naturale n il numero $n^2 - 4n + 3$ è divisibile per 7?

** **6** Da un foglio di carta quadrettata si vuole ricavare una cornice di forma rettangolare e dello spessore di un solo quadratino (come in figura). Si vuole però che i quadratini della cornice siano tanti quanti i quadratini interni (cosa che non è vera nella figura). È possibile? Quali sono tutte le possibili soluzioni?



* **7** Dimostrare che se un intero a non è divisibile né per 2 né per 3 allora il numero $a^2 - 1$ è divisibile per 24.

8 Dimostrare: se l'equazione di secondo grado, a coefficienti *interi relativi* $ax^2 + bx + c = 0$ ha una soluzione intera x, allora $|x|$ divide $|c|$.

19.2 Con il crivello di Eratostene si possono costruire delle estese tavole di numeri primi. La successione dei numeri primi:

L'insieme dei numeri primi è infinito

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, ...

ha un andamento piuttosto bizzarro; si nota però che, andando avanti nella successione degli in-

teri, i numeri primi si fanno sempre piú rari. Viene spontaneo chiedersi se, ad un certo punto, i numeri primi scompaiano del tutto. In altre parole: vi è solo un numero finito (magari grandissimo) di numeri primi, oppure ve ne sono infiniti? La risposta è contenuta in un classico teorema di Euclide.

Teorema. *L'insieme dei numeri primi è infinito.*

La dimostrazione di Euclide è veramente geniale, nella sua semplicità. Prima di esporla, richiamiamo la divisione con resto, che abbiamo studiato nel § 11.3: dati due interi a, b ($b > 0$) esiste un'unica coppia di interi q, r (detti quoziente e resto rispettivamente) tali che si abbia

$$a = bq + r$$

essendo $0 \leq r < b$.

Supponiamo dunque che l'insieme dei numeri primi sia finito: $\{2, 3, 5, 7, \ldots, p\}$, indicando con p il numero primo piú grande di tutti. Moltiplichiamo fra loro tutti questi numeri ed aggiungiamo 1 al risultato. Otteniamo cosí il numero

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + 1$$

Questo numero non è divisibile per 2 perché la sua espressione ci dice che dividendolo per 2 si ottiene come resto 1; non è divisibile per 3 perché dividendolo per 3 si ottiene come resto 1. Analogamente, non è divisibile né per 5, né per 7, né per ..., né per p.

Ma questo è assurdo perché N deve essere rappresentabile come prodotto di fattori primi, e quindi deve essere divisibile per qualcuno dei numeri $2, 3, 5, 7, \ldots, p$. Dunque non è vero che

l'insieme $\{2, 3, 5, 7, \ldots, p\}$ comprende *tutti* i numeri primi ■

Naturalmente, se noi compiliamo un qualsiasi elenco di numeri primi: $2, 3, 5, 7, \ldots, p$, ci è lecito considerare il numero

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + 1$$

Ebbene: o N è un numero primo non compreso nel nostro elenco, oppure è composto di fattori primi estranei al nostro elenco. Dunque il procedimento di Euclide dà modo di costruire tanti numeri primi quanti si vuole.

La dimostrazione di Euclide ha veramente aperto una strada; nella storia della matematica si sono avute altre celebri dimostrazioni basate sulla stessa idea: dato un elenco di oggetti matematici, utilizzare l'elenco stesso per trovare un nuovo oggetto che non vi è compreso.

La successione dei numeri primi ha esercitato sempre un grande fascino sui matematici: essa pone problemi che si possono risolvere solo con molti sforzi ed altri problemi che da secoli resistono a tutti gli attacchi. Vogliamo indicarne uno per curiosità: una tavola di numeri primi mette in evidenza coppie di numeri primi che differiscono di 2; ad esempio: 5 e 7, oppure 11 e 13, 17 e 19 ecc. ... (**numeri primi gemelli**). È spontaneo chiedersi se l'insieme delle coppie di numeri primi gemelli è infinito. Il problema sembra dello stesso genere di quello che abbiamo or ora facilmente risolto seguendo Euclide.

Eppure, i matematici, dopo innumerevoli tentativi, non sono ancora in grado di dare una risposta.

Esercizi

1 Vi sono coppie di numeri primi che differiscono per un numero dispari?

2 Nella dimostrazione di Euclide si fanno intervenire numeri di questo tipo:
$2+1$, $2\cdot 3+1$, $2\cdot 3\cdot 5+1$, $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7+1$, $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11+1$, $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13+1$
Verificare che i primi cinque sono numeri primi. L'ultimo (come si può vedere con un po' di pazienza) è composto.

** **3** Una piccola calcolatrice fornisce i valori approssimati, in forma decimale, di $\frac{a}{b}$, essendo a e b interi positivi. Sapendo che l'errore, per eccesso o per difetto, non supera $\frac{1}{1\,000\,000}$ è possibile decidere se b divide a?

4 Considerare i numeri
$2\cdot 3\cdot 5\cdot 7+2$, $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7+3$, $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7+4$
Verificare che essi sono tutti composti. Fino a quale valore di m il numero $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7+m$ risulta certamente composto?
In generale, preso l'insieme di tutti i numeri primi compresi fra 2 ed un certo numero primo p: $\{2, 3, 5, \ldots, p\}$, fino a quale valore di $m \geq 2$ si può affermare che risulta composto il numero $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot p+m$?
(Possiamo così constatare che nella successione degli interi naturali si trovano delle file di numeri composti consecutivi lunghe quanto si vuole).

5 Ricordiamo che abbiamo posto: $m! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot m$. Con quante cifre decimali 0 termina la rappresentazione decimale di $m!$?

6 Dimostrare che ogni numero primo maggiore di 2 può essere rappresentato (e in un unico modo) come differenza dei quadrati di due interi.

Il massimo comun divisore. L'algoritmo di Euclide

19.3 Conosciamo già, fin dalle scuole medie inferiori, la nozione di **massimo comun divisore**. Del resto, il termine con cui lo si indica parla da sé: *dati due numeri interi positivi a , b si dice massimo comun divisore il maggiore dei loro divisori comuni.*

Ad esempio, l'insieme dei divisori di 12 è $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$; l'insieme dei divisori di 18 è $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. L'insieme dei divisori comuni di 12 e 18 è $\{1, 2, 3, 6\}$: dunque il massimo comun divisore di 12 e 18 è 6. Notiamo che fra i divisori di ogni intero positivo c'è sempre 1, e quindi fra i divisori comuni di due interi positivi c'è sempre il numero 1; due numeri che abbiano soltanto 1 come divisore comune, e che abbiano

perciò 1 come massimo divisore, si dicono **primi fra loro**. Ad esempio i numeri 9 e 10 sono primi fra loro.

Indicheremo con m.c.d. (a, b) il massimo comun divisore di a e b.

Nelle scuole medie abbiamo imparato a calcolare il massimo comun divisore attraverso la scomposizione di due numeri in fattori primi: il m.c.d. (a, b) è dato dal prodotto dei fattori primi comuni ad a e b, presi con l'esponente minore fra quelli con cui compaiono nelle due fattorizzazioni. Ad esempio: si ha $12 = 2^2 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3^2$, perciò m.c.d. $(12, 18) = 2 \cdot 3 = 6$. La regola va completata dicendo che se non vi sono fattori primi in comune il m.c.d. è 1. Ad esempio: $9 = 3^2$, $10 = 2 \cdot 5$: dunque m.c.d. $(9, 10) = 1$. Questa regola è facilmente intuibile: vogliamo però sottolineare che essa si basa sul teorema della fattorizzazione unica, accettato come evidente.

Ora vogliamo ritornare sull'argomento per esporre un metodo classico (risalente ad Euclide) per il calcolo del massimo comun divisore. Questo metodo ha molti vantaggi: quello di richiedere solo la conoscenza della divisione con resto (che abbiamo già richiamato nel § precedente), quello della velocità di calcolo (vantaggio apprezzabile specialmente se i due numeri sono un po' grandi) ed altri ancora che vedremo.

Siano assegnati due interi positivi: a, b. (Possiamo sempre supporre che sia $a \geq b$); eseguendo la divisione con resto di a per b si ottiene la relazione:

$$a = bq + r \qquad (1)$$

dove q ed r sono univocamente definiti se si impone $0 \leq r < b$.

Ora, possiamo affermare:

Un intero d che sia divisore di a e di b è anche divisore di r.
Un intero d che sia divisore di b e di r è anche divisore di a.

Dimostriamo la prima affermazione:

«*d è divisore di a*» significa che esiste un intero a' tale che $a = d\,a'$;
«*d è divisore di b*» significa che esiste un intero b' tale che $b = d\,b'$.

Sostituendo nelle (1) si ottiene:

$$d\,a' = d\,b'q + r$$

e, mettendo in evidenza r,

$$r = d\,a' - d\,b'q = d\,(a' - b'q)$$

Questa relazione mostra che d divide r.

È ancora piú facile la dimostrazione della seconda affermazione:

«*d è divisore di b*» significa che esiste un intero b' tale che $b = d\,b'$;
«*d è divisore di r*» significa che esiste un intero r' tale che $r = d\,r'$.

Sostituendo nella (1) si ha

$$a = d\,b'q + d\,r' = d\,(b'q + r')$$

Da questa relazione si vede che d divide a.

Possiamo allora concludere con questa importante osservazione: se *r è il resto della divisione di a per b, i divisori comuni della coppia* (a, b) *coincidono con i divisori comuni della coppia* (b, r); *dunque il massimo comun divisore della coppia* (a, b) *è il medesimo della coppia* (b, r). Nel caso $r = 0$, b divide a e

perciò il massimo comun divisore di (a, b) *è* b; osserviamo che anche in questo caso è vero che m.c.d. (a, b) = m.c.d. (b, r). Infatti ogni intero x è un divisore di 0 essendo $0 \cdot x = 0$; dunque nella coppia $(b, 0)$, essendo b divisore sia di b che di 0, il massimo comun divisore è b.

Ma supponiamo che sia $0 < r$; in ogni caso è $r < b$; dunque la coppia (b, r) è fatta di numeri piú piccoli dei corrispondenti numeri della coppia (a, b), e la ricerca del massimo comun divisore risulta semplificata. L'idea che si presenta spontanea è quella di ripetere il procedimento. Vediamo un esempio.

Vogliamo calcolare il m.c.d. (76 , 34) ; si ha $76 = 34 \cdot 2 + 8$; allora m.c.d. (76 , 34) = m.c.d. (34 , 8). Dividiamo ora 34 per 8 : $34 = 8 \cdot 4 + 2$; dunque m.c.d. (34 , 8) = m.c.d. (8 , 2). A questo punto, si vede subito che 2 divide 8: perciò si può affermare che il m.c.d. cercato è 2. Ma si può anche eseguire un'ulteriore divisione: $8 = 2 \cdot 4 + 0$; perciò m.c.d. (8 , 2) = m.c.d. (2 , 0) = 2 .

Da questo esempio emerge chiaramente il procedimento di Euclide (detto anche procedimento delle divisioni successive) per la ricerca del m.c.d. di due interi a, b:

alla coppia assegnata (a, b) *si sostituisce la coppia* (b, r) , *dove* r *è il resto della divisione di* a *per* b; *se è* $r > 0$, *alla coppia* (b, r) *si sostituisce la coppia* (r, r'), *dove* r' *è il resto della divisione di* b *per* r. *Cosí si prosegue: poiché i resti della divisione decrescono ad ogni passo e, d'altra parte, sono numeri non negativi, si giungerà dopo un certo numero di passi ad una coppia del tipo* $(r^*, 0)$: *allora* r^* *è il* m.c.d. (a, b).

Vediamo ancora un esempio: calcoliamo il m.c.d. (3870 , 2724).

Riportiamo schematicamente nella tabella i ri-

sultati delle successive divisioni; nell'ultima colonna segniamo i quozienti delle divisioni:

$$
\begin{aligned}
3870 &= 2724 \cdot 1 + 1146 \\
2724 &= 1146 \cdot 2 + 432 \\
1146 &= 432 \cdot 2 + 282 \\
432 &= 282 \cdot 1 + 150 \\
282 &= 150 \cdot 1 + 132 \\
150 &= 132 \cdot 1 + 18 \\
132 &= 18 \cdot 7 + 6 \\
18 &= 6 \cdot 3 + 0
\end{aligned}
$$

3870	2724	1
2724	1146	2
1146	432	2
432	282	1
282	150	1
150	132	1
132	18	7
18	6	3
6	0	

Dunque il m.c.d. è 6.

Questa tabella ci fa venire l'idea che il procedimento di Euclide, essendo basato su regole fisse, possa essere eseguito da una macchina calcolatrice programmabile.

Anzitutto, la macchina dovrà possedere due celle (almeno) di memoria, i cui contenuti verranno indicati con x ed y. Inizialmente scriveremo in queste celle i due numeri di cui vogliamo trovare il m.c.d., cioè porremo $x = a$, $y = b$.

La prima mossa è quella di eseguire la divisione con resto di x per y e di scrivere il divisore in luogo di x ed il resto in luogo di y.

A questo punto, la macchina deve esaminare i risultati del calcolo svolto e « prendere una decisione »; precisamente: se il numero nella seconda casella è 0, questo significa che il numero in x è il m.c.d. cercato. La macchina si arresta (STOP). Se nella seconda casella compare un numero diverso da zero, deve essere svolta ancora una divisione di x per y: cioè deve essere compiuto ancora un ciclo: viene eseguita ancora una divisione con resto, poi si fa ancora un « test » sulla seconda casella. (L'operazione di « test » è indicata con un rombo).

Dopo avere compiuto un numero piú o meno grande di cicli, la macchina si ferma certamente.

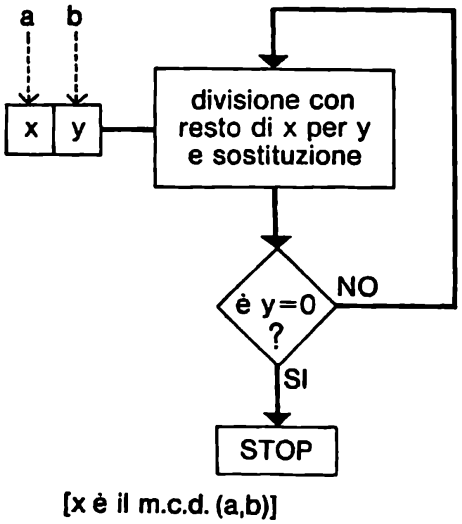


Fig. 3

Le macchine che servono per fare calcoli di questo tipo sono sostanzialmente piú complicate delle macchine molto semplici che realizzano i « grafi di calcolo », introdotti nel cap. 9. C'è anche qui un grafo, ma il grafo ha un ciclo e, soprattutto, la macchina deve essere in grado di « prendere una decisione » scegliendo un cammino piuttosto che un altro. I calcolatori elettronici hanno appunto queste prestazioni.

Un procedimento matematico di calcolo che possa essere eseguito in modo automatico si dice un **algoritmo***; quello che abbiamo presentato in questo § si dice **algoritmo di Euclide.**

Una delle domande piú importanti che si pongono i matematici quando studiano un problema è se la soluzione si possa ottenere con un algoritmo. In caso affermativo, il problema può essere affidato ad una macchina (ammesso, naturalmente, che si possa costruire in pratica una macchina sufficientemente grande e sufficientemente veloce...).

I cenni schematici che abbiamo dato sugli algoritmi e sulle macchine calcolatrici sono ben lontani dall'essere esaurienti e anche dall'essere precisi...; sono solo uno stimolo verso un campo di estremo interesse ed attualità.

Ritorniamo all'algoritmo di Euclide per una semplice osservazione. Noi abbiamo supposto $a \geq b$ (chiamando sempre con a il numero che si scrive inizialmente nella prima casella e con b il numero che si scrive nella seconda). Che cosa accadrebbe se fosse $a < b$? Nulla di strano: nella prima divisione con resto si avrebbe: $a = b \cdot 0 + a$ e la

* Il termine *algoritmo* non è altro che il nome latinizzato del matematico arabo Mohamed al Khuwarizmi, che operò a Bagdad intorno all'830 d. C.. Egli scrisse un libro dedicato alle tecniche elementari dell'algebra tra cui quella indicata col termine « al-giabr », consistente nel trasportare un termine da un membro all'altro di una equazione. Questo termine, latinizzato, è diventato « algebra ». Come si vede, l'algebra e gli algoritmi sono strettamente legati fra loro, anche dal punto di vista storico.

macchina scriverebbe il valore b nella prima casella ed il valore a (come primo resto) nella seconda casella. Quindi il primo ciclo sarebbe semplicemente impiegato per ordinare i due numeri.

Esercizi

1 Due numeri consecutivi sono sempre primi fra loro; perché?

2 Se a è un numero dispari, i numeri a ed $a + 2$ sono primi fra loro; perché? Analogamente: se a non è divisibile per 3, i numeri a ed $a + 3$ sono primi fra loro.

3 Per mezzo delll'algoritmo di Euclide calcolare: m.c.d. (1122 , 105), m.c.d. (2244 , 418), mc.d. (6188 , 4709).

4 Dati due interi a , b positivi e detto d il loro massimo comun divisore, dimostrare che i numeri $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}$ sono primi fra loro.

5 Dimostrare che, per ogni intero naturale n, i due numeri $21n + 4$, $14n + 3$ sono primi fra loro.

* **6** Si consideri la successione di Fibonacci: 0 , 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , ... che è cosí definita: i primi due termini sono 0 ed 1; degli altri termini ciascuno è somma dei due che lo precedono. Ad esempio: $1 = 0 + 1$, $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 2$, $5 = 2 + 3$, ecc. Dimostrare che due termini consecutivi sono primi fra loro.

** **7** Dimostrare la seguente valutazione del numero delle divisioni successive che si richiedono per calcolare il m.c.d. (a , b) mediante l'algoritmo euclideo: se k è un intero tale che $2^k \geq b$, il numero delle divisioni che occorrono non supera $2k$. (Osservare il comportamento del resto in *due* divisioni successive).

Corpi e anelli

19.4 Nei capitoli 8 ed 11 abbiamo studiato alcuni insiemi numerici molto importanti: quello degli interi relativi ($\mathbf{Z}$), quello dei razionali relativi ($\mathbf{Q}$) e quello dei numeri reali ($\mathbf{R}$). In tutti questi insiemi sono state introdotte due operazioni fondamentali: l'addizione ($+$) e la moltiplicazione ($\cdot$).

Entrambe queste operazioni fanno corrispondere ad una coppia di elementi dell'insieme un ele-

mento dello stesso insieme, cioè sono del tipo $A \times A \longrightarrow A$ (indicando con A l'insieme numerico di cui si tratta, e ricordando che il segno $\times$ indica il prodotto cartesiano). Operazioni di questo tipo si dicono di **composizione interna**. L'algebra è la parte della matematica che si occupa delle operazioni di composizione interna e delle loro proprietà.

Riprendiamo in esame le proprietà dell'addizione e della moltiplicazione studiate nel capitolo 8 che valgono in **Q** e in **R**:

1) *L'addizione gode della proprietà* **associativa:**

$(a + b) + c = a + (b + c)$

2) *L'addizione gode della proprietà* **commutativa:**

$a + b = b + a$

3) *Esiste un (unico)* **elemento neutro** *per l'addizione: il numero* 0:

$a + 0 = a$

4) *Per ogni numero a c'è un (unico)* **opposto,** *cioè un unico numero,* $-a$, *tale che*

$a + (-a) = 0$

5) *La moltiplicazione gode della proprietà* **associativa:**

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

6) *La moltiplicazione gode della proprietà* **commutativa:**

$a \cdot b = b \cdot a$

7) *Per la moltiplicazione vi è un (unico)* **elemento neutro**, *che si indica con* 1:

$a \cdot 1 = a$

8) *Ogni numero diverso da* 0 *ha un unico* **reciproco**, *cioè un numero* $\frac{1}{a}$ *tale che*

$a \cdot \frac{1}{a} = 1$

9) *Vale la proprietà* **distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:**

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Le prime quattro proprietà riguardano l'addizione, le proprietà 5)-8) riguardano la moltiplicazione e sono formalmente (cioè con soli mutamenti di simboli) quelle stesse dell'addizione, con una sola importante diversità che vogliamo lasciare scoprire al lettore. Infine la proprietà 9) lega fra loro l'addizione e la moltiplicazione: abbiamo già ampiamente riscontrato la sua importanza.

Un insieme in cui siano definite due operazioni aventi le proprietà 1) ... 9) si dice un **corpo** (si usa anche la parola **campo**). Dunque **Q** ed **R** sono corpi; ma si trovano tanti altri corpi interessanti, come avremo occasione di vedere in seguito.

Intanto consideriamo un semplice esempio.

Esempio. Indichiamo con $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ il sottoinsieme di **R**: $\{x + y\sqrt{2}\}$ dove x ed y sono *numeri razionali*

relativi presi in tutti i modi possibili, e le operazioni di composizione interna sono la solita addizione e la solita moltiplicazione. In primo luogo, dobbiamo chiederci: queste operazioni sono veramente di composizione interna, cioè, applicate ad elementi di $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, danno come risultato un elemento dello stesso insieme? Per constatarlo non c'è che da fare un semplice calcolo. Prendiamo due elementi:

$$a = x_1 + y_1\sqrt{2} \quad , \quad b = x_2 + y_2\sqrt{2}$$

Si ricava:

$$a + b = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{2}$$

$$a \cdot b = (x_1x_2 + 2y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{2}$$

È dunque evidente che la somma e il prodotto di due elementi di $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ appartengono ancora a $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.

Le proprietà associativa e commutativa dell'addizione, associativa e commutativa della moltiplicazione e la proprietà distributiva valgono, ovviamente, perché valgono in $\mathbf{R}$. L'elemento neutro per l'addizione è lo 0 di $\mathbf{R}$, che si ottiene dall'espressione $x + y\sqrt{2}$ ponendo $x = 0$, $y = 0$. Per nessuna altra coppia (x, y) si ha $x + y\sqrt{2} = 0$; infatti, da questa relazione, se fosse $y \neq 0$, si ricaverebbe $\sqrt{2} = -\dfrac{x}{y}$, uguaglianza assurda perché, come sappiamo (vd. § 11.4), $\sqrt{2}$ non è un numero razionale. Deve dunque essere $y = 0$, e si deduce subito che deve anche essere $x = 0$.

È evidente poi che l'elemento neutro della moltiplicazione è $1 = 1 + 0\sqrt{2}$; l'opposto dell'elemento $x + y\sqrt{2}$ è $-x + (-y)\sqrt{2}$. L'unico punto che resta da verificare è l'esistenza del reciproco. Consideriamo un elemento $x + y\sqrt{2} \neq 0$

(pertanto x ed y non possono essere entrambi nulli) e vediamo se il reciproco $\dfrac{1}{x+y\sqrt{2}}$ appartiene all'insieme; in questa frazione, moltiplichiamo numeratore e denominatore per $x-y\sqrt{2}$ (numero certamente diverso da zero perché x e $-y$ non sono entrambi nulli); otteniamo

$$\frac{1}{x+y\sqrt{2}} = \frac{x-y\sqrt{2}}{x^2-2y^2} =$$

$$= \frac{x}{x^2-2y^2} + \frac{-y}{x^2-2y^2}\sqrt{2}$$

(Notiamo che il denominatore x^2-2y^2 non può annullarsi per la solita ragione che 2 non è il quadrato di alcun numero razionale).

Il procedimento che abbiamo seguito per eliminare $\sqrt{2}$ dal denominatore viene indicato tradizionalmente come procedimento di **razionalizzazione del denominatore.**

Cosí abbiamo trovato un interessante esempio di corpo.

Ritorniamo ai nostri insiemi numerici; abbiamo lasciato in disparte **Z**, ed è naturale perché non gode di tutte e nove le nostre proprietà: gli manca la 8) dal momento che (come sappiamo) gli interi relativi diversi da 0, tranne 1 e -1, non hanno un reciproco.

Viene naturale, a questo punto, fare una classificazione di varie strutture algebriche che si possono ottenere lasciando cadere alcune delle nove proprietà scritte.

Una struttura algebrica in cui siano definite le operazioni $+$, $\cdot$ *e valgano le proprietà:* 1), 2), 3), 4), 5) e 9) *si dice un* **anello.**

Non è detto che valga la proprietà commutativa della moltiplicazione (quella dell'addizione è invece richiesta). Se vale anche la proprietà commutativa della moltiplicazione, cioè la 6), l'anello si dice **commutativo**. Per ora, tutti gli anelli che ci capita di considerare sono commutativi; nel proseguimento dei nostri studi di matematica troveremo però anche importanti anelli **non commutativi**. Un anello per cui vale la 7) si dice **anello con unità**.

L'insieme **Z**, degli interi relativi, con le ordinarie operazioni $+$, $\cdot$ è un **anello commutativo con unità**.

Consideriamo ora in **Z** il sottoinsieme formato dai multipli (anche negativi) di 3, cioè l'insieme $\{3n\}$, dove n è un qualsiasi intero relativo. Indichiamo questo insieme $\mathfrak{J}(3)$. Si vede facilmente che *le operazioni di addizione, di moltiplicazione, di «opposto» definite in* **Z** *sono operazioni di composizione interna in* $\mathfrak{J}(3)$. In altre parole: sommando o moltiplicando due multipli di 3 si ottiene un multiplo di 3; l'opposto di un multiplo di 3 è un multiplo di 3. (Verificare tutto questo con cura).

Dunque $\mathfrak{J}(3)$ è un **anello commutativo** (lo possiamo dire un **sottoanello** di **Z**). Notiamo che $\mathfrak{J}(3)$ *non ha una unità;* cioè per $\mathfrak{J}(3)$ non vale la proprietà 7).

C'è però una proprietà importante di $\mathfrak{J}(3)$ come sottoanello di **Z**: moltiplicando un elemento di $\mathfrak{J}(3)$ *per un elemento qualsiasi di* **Z** si ottiene ancora un elemento di $\mathfrak{J}(3)$. Infatti, indicando con $3n$ un elemento qualsiasi di $\mathfrak{J}(3)$, e con m un qualsiasi elemento di **Z**, risulta $m(3n) = 3(mn)$. [Prima ci eravamo limitati a constatare che il prodotto di due elementi di $\mathfrak{J}(3)$ è in $\mathfrak{J}(3)$: la proprietà ora messa in evidenza dice di piú!]. Enunciamo una definizione.

Sia A un anello commutativo ed $\mathfrak{J}$ *un suo sottoanello: se moltiplicando un elemento qualsiasi di* $\mathfrak{J}$ *per un*

elemento qualsiasi di A si ottiene ancora un elemento di $\mathfrak{J}$, *si dice che* $\mathfrak{J}$ *è un* **ideale** *di A.*

Quello che abbiamo detto per $\mathfrak{J}(3)$ lo possiamo ripetere per l'insieme $\mathfrak{J}(k)$ dei multipli di un intero k qualsiasi: si tratta in ogni caso di ideali di $\mathbf{Z}$. Notiamo che $\mathfrak{J}(1)$ è uguale a $\mathbf{Z}$, mentre $\mathfrak{J}(0)$ si riduce al solo zero.

Vediamo ancora un esempio interessante per lo studio dell'aritmetica. Prendiamo due interi positivi qualsiasi: a, b e consideriamo l'insieme $\mathfrak{J}(a, b) = \{ax + by\}$, dove x ed y sono elementi di $\mathbf{Z}$.

Un elemento $ax + by$ si dice **combinazione lineare** di a e b, con **coefficienti** x ed y, rispettivamente.

Ad esempio, fra gli infiniti elementi di $\mathfrak{J}(6, 15)$, troviamo: $6, 15, 21, 9, 3, -3, \ldots$ (per esercizio, scrivere i possibili coefficienti di una combinazione lineare, per ciascuno di questi numeri).

Verifichiamo che $\mathfrak{J}(a, b)$ è un ideale di $\mathbf{Z}$; infatti:

α) *La somma di due elementi qualunque di* $\mathfrak{J}(a, b)$ *appartiene ad* $\mathfrak{J}(a, b)$.

Sia

$$z_1 = ax_1 + by_1 \ , \ z_2 = ax_2 + by_2$$

allora

$$z_1 + z_2 = a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2)$$

β) *L'opposto di un elemento di* $\mathfrak{J}(a, b)$ *è un elemento di* $\mathfrak{J}$.

Se

$$z = ax + by$$

$$-z = a(-x) + b(-y)$$

γ) *Moltiplicando un elemento qualunque di* $\mathbf{Z}$ *pre un elemento di* $\mathfrak{J}(a, b)$ *si ottiene ancora un elemento di* $\mathfrak{J}(a, b)$.

Infatti, se è $z = ax + by$ ed m è un qualunque intero relativo, si ha

$$m \cdot z = m(ax + by) = a(mx) + b(my)$$

Vediamo come può esserci utile $\mathfrak{J}(a, b)$ nell'analizzare l'algoritmo di Euclide per la ricerca del m.c.d. (a, b). Facciamo questa semplice osservazione:

Nelle successive divisioni che si eseguono per trovare il m.c.d. (a, b) *con l'algoritmo di Euclide, i successivi resti sono elementi di* $\mathfrak{J}(a, b)$; *dunque anche il* m.c.d. (a, b) *appartiene ad* $\mathfrak{J}(a, b)$.

Infatti: eseguiamo una divisione con resto, prendendo sia il dividendo l che il divisore m in $\mathfrak{J}(a, b)$. Si ha

$$l = mq + r$$

indicando con q il quoziente e con r il resto. Da questa relazione si ricava

$$r = l - mq$$

Ora:

— per la proprietà γ), essendo m in $\mathfrak{J}(a, b)$, anche mq appartiene ad $\mathfrak{J}(a, b)$;

— per la proprietà β) $-mq$, essendo opposto di mq, appartiene ad $\mathfrak{J}(a, b)$;

— per la proprietà α) $l - mq$, come somma di due elementi di $\mathfrak{J}(a, b)$, appartiene ad $\mathfrak{J}(a, b)$.

Dunque, se dividendo e divisore stanno in $\mathfrak{J}(a, b)$, anche il resto sta in $\mathfrak{J}(a, b)$.

Riflettiamo ora sull'algoritmo di Euclide per la ricerca del m.c.d. (a, b); anzitutto notiamo che a e b sono elementi di $\mathfrak{I}(a, b)$ (perché?). Dunque, il primo resto sta in $\mathfrak{I}(a, b)$, e così pure i resti successivi. Il m.c.d. (a, b), che è l'ultimo resto positivo, appartiene pure ad $\mathfrak{I}(a, b)$.

Il risultato che abbiamo trovato è così importante che vale la pena di scriverlo per disteso.

I - *Dati due interi positivi a, b, il loro massimo comun divisore si può esprimere come loro combinazione lineare a coefficenti interi relativi.*

In altre parole, esistono due interi relativi x, y, tali che

$$\text{m.c.d.}\ (a, b) = ax + by \qquad (2)$$

Ad esempio: m.c.d. $(7, 9) = 1 = 7 \cdot (4) + 9\,(-3)$; per trovare i coefficienti x, y della combinazione lineare non c'è che da seguire, a ritroso, il procedimento di Euclide. Nell'esempio ora esposto, si ha $9 = 7 + 2$, $7 = 2 \cdot 3 + 1$; dunque $1 = 7 - 2 \cdot 3 = 7 - (9 - 7) \cdot 3 = 7 \cdot 4 + 9\,(-3)$.

Una conclusione importante che possiamo ricavare dal risultato ora trovato è la seguente:

II - *Posto d = m.c.d. (a, b), si ha $\mathfrak{I}(a, b) = \mathfrak{I}(d)$.* (Cioè: *l'insieme delle combinazioni lineari a coefficienti interi relativi di a e b coincide con l'insieme dei multipli del loro massimo comun divisore*).

Dimostriamolo in modo preciso.

Ogni elemento $ax + by$ di $\mathfrak{I}(a, b)$ è un elemento di $\mathfrak{I}(d)$. Infatti, essendo d un divisore comune di a e b, si può porre $a = d\,a'$, $b = d\,b'$, essendo a' e b' numeri interi positivi. Allora $ax + by = d\,a'\,x + d\,b'y = d\,(a'x + b'y)$ e questa relazione prova che il numero $ax + by$ è in $\mathfrak{I}(d)$.

Ogni elemento di $\mathfrak{I}(d)$ *è un elemento di* $\mathfrak{I}(a, b)$. Infatti, un elemento u di $\mathfrak{I}(d)$ è un multiplo di d: $u = n\,d$. Per la (2) si può scrivere $u = nd = n(ax + by)$, essendo x ed y due interi relativi opportuni. Allora $u = nd = a(nx) + b(ny)$ e questo prova che u è un elemento di $\mathfrak{I}(a, b)$ ■

Esercizi

1 I numeri decimali (cioè i numeri del tipo $\frac{m}{10^n}$ dove m è un intero relativo ed n è un intero naturale) costituiscono un corpo? (Con le ordinarie operazioni di addizione e moltiplicazione). Costituiscono un anello?

** **2** I numeri del tipo $x + y\sqrt{2} + z\sqrt{3}$ dove x, y, z sono numeri razionali costituiscono un corpo?

** **3** I numeri del tipo $x + y\sqrt{2} + z\sqrt{3} + u\sqrt{6}$, con x, y, z, u numeri razionali, costituiscono un corpo?

* **4** Dimostrare che moltiplicando fra loro due numeri del tipo $a^2 - b^2$, essendo a e b interi, si ottiene un numero dello stesso tipo.

5 L'equazione $4x + 6y = 7$ può avere una soluzione (x, y) con x ed y interi relativi?

6 L'equazione $7x + 9y = 1$ può avere soluzioni (x, y) date da coppie di interi relativi?

* **7** Riprendere l'esercizio precedente, ed esprimere tutte le soluzioni esistenti.

* **8** In generale: data un'equazione $ax + by = c$, con a, b, c interi relativi, dire sotto quali condizioni essa ammette soluzioni intere.

19.5 La rappresentazione del massimo comun divisore data dalla formula (2) ci apre la strada verso risultati molto interessanti. Vediamone alcuni.

Il minimo comune multiplo

Cominciamo con una proprietà importante (e facilmente intuibile) del massimo comun divisore.

I - *Ogni divisore comune degli interi positivi* a, b *è un divisore del loro massimo comun divisore.*

Dimostrazione: sia m un divisore comune di a e b; possiamo scrivere $a = m\,a'$, $b = m\,b'$, dove a' e b' sono numeri interi. Poniamo $d =$ m.c.d. $(a\,,\,b)$; esistono [ricordare la (2)], due interi relativi $x\,,\,y$ tali che

$$d = ax + by$$

perciò

$$d = ma'x + mb'y = m\,(a'x + b'y)$$

Questa uguaglianza ci dice appunto che m è un divisore di d ■

Il risultato ora trovato ci dà l'occasione di una interessante osservazione che riguarda le relazioni di ordine. Nel § 10.2, a proposito dei numeri razionali, abbiamo studiato la relazione $\leqslant$; richiamiamo ora in modo preciso le proprietà che abbiamo trovato:

(α) $x \leqslant x$ (proprietà **riflessiva**);

(β) se è $x \leqslant y$ ed è $y \leqslant x$, allora è $x = y$ (questa proprietà è detta **antisimmetrica**);

(γ) se è $x \leqslant y$ ed è $y \leqslant z$, allora è $x \leqslant z$ (proprietà **transitiva**) .

Inoltre vale nei numeri razionali (come, del resto, negli interi o nei reali) la seguente proprietà:

(δ) dati due elementi qualsiasi $x\,,\,y$ si ha $x \leqslant y$ oppure $y \leqslant x$.

Consideriamo ora la relazione che abbiamo introdotta nell'insieme dei numeri interi positivi: «x è divisore di y». Indichiamo questa relazione con $x \prec y$.

Lasciamo allo studioso il facile compito di verificare che anche per questa relazione valgono le

proprietà (α), (β) e (γ). Non vale invece la (δ) perché, presi due interi positivi, non è detto che l'uno sia multiplo dell'altro.

In questo modo, assumiamo un atteggiamento analogo a quello che abbiamo assunto nel § precedente a proposito delle operazioni algebriche: guidati da esempi concreti, introduciamo una nuova struttura matematica, piú generale, in cui solo alcune proprietà della vecchia struttura sono conservate. [Come abbiamo visto, nel passare dalla relazione $\leqslant$ (in **Z**, oppure **Q**, oppure **R**) alla relazione $\prec$ si conservano le proprietà (α), (β) e (γ), ma si perde la (δ)].

Una relazione che abbia le proprietà (α), (β) e (γ) *si dice un* **ordinamento** (*oppure una* **relazione d'ordine**). *Se vale anche la* (δ) *si dice che l'ordinamento è* **totale** (*o anche* **lineare**).

Dunque, con questa nomenclatura piú precisa, possiamo dire che l'ordinamento naturale in **Z** o in **Q** o in **R** è un ordinamento totale, mentre non è tale l'ordinamento per divisibilità.

Dato un ordinamento $\prec$ in un insieme T, diciamo che un elemento a è un elemento **massimo** in T se per ogni x che appartiene a T si ha $x \prec a$.

Il teorema I ci dice allora che, *nell'insieme dei divisori comuni di due interi positivi* a, b, *il* m.c.d. (a, b) *è un elemento massimo non solo rispetto all'ordinamento consueto degli interi, ma anche rispetto all'ordinamento per divisibilità.* Infatti se x è un divisore comune di a e b cioè $x \prec a$ ed $x \prec b$, per il teorema I x divide $d = \text{m.c.d.}\ (a, b)$, cioè $x \prec d$.

Un altro importante risultato di aritmetica è il seguente:

II - *Se p, numero primo, è un divisore del prodotto*

$a \cdot b$ di due interi e non è divisore di a, allora è divisore di b.

Dimostrazione: essendo p numero primo, se p non divide a si può affermare che a e p sono primi fra loro, cioè m.c.d. $(p, a) = 1$.

Esistono allora, per il teorema I del § precedente, due interi relativi x, y tali che

$$1 = ax + py$$

Moltiplichiamo membro a membro questa relazione per b. Si ha

$$b = abx + bpy$$

Ma il prodotto $a \cdot b$, per ipotesi, è divisibile per p; dunque anche $a \cdot b \cdot x$ è divisibile per p. È poi evidente che $b \cdot p \cdot y$ è divisibile per p. Si può concludere che b, essendo somma di due multipli di p, è multiplo di p ■

Da questo risultato si potrebbe dedurre facilmente il teorema sulla unicità della scomposizione di un numero in fattori primi, a cui abbiamo accennato. Ma non possiamo, nei limiti di questo corso, soffermarci piú a lungo. Preferiamo dedicare il resto di questo paragrafo ad un'altra nozione importante: quella di *minimo comune multiplo* di due interi positivi. Avvertiamo però il lettore che le righe seguenti, malgrado il loro sottofondo intuitivo, risultano un po' durette. Non essendo essenziali per la comprensione del séguito, esse possono essere tralasciate, specialmente in una prima lettura.

Dati due interi positivi a, b, si chiama minimo comune multiplo di a, b [e si indica con m.c.m. *(a, b)] il piú piccolo dei multipli positivi comuni di a e b.*

In questa definizione si precisa che ci si riferisce ai soli multipli *positivi* di a e b; infatti, se si prendesse in considerazione anche lo zero — che è multiplo di ogni numero — il minimo comune multiplo sarebbe in ogni caso uguale a zero, e la nozione di m.c.m. non avrebbe piú alcun interesse.

Le osservazioni che ora svolgiamo hanno soprattutto lo scopo di mettere in collegamento il m.c.d. con il m.c.m. di due interi positivi a e b. La prima osservazione che viene spontanea è che il prodotto $a \cdot b$ è un multiplo comune di a e b; certamente, non sempre questo prodotto è il m.c.m. dei due numeri. Il teorema che segue ci dice però che per la ricerca del m.c.m. (a, b) basta considerare i soli divisori di $a \cdot b$.

III - *Siano a e b due interi positivi; il* m.c.m. (a, b) *è un divisore di $a \cdot b$.*

Dimostrazione: poniamo, per brevità, $s =$ m.c.m. (a, b); introduciamo poi l'intero z cosí definito: $z =$ m.c.d. (ab, s).

L'intero a è un divisore di ab ed è un divisore di s; per il teorema I di questo §, a è un divisore di z; alla stessa maniera si vede che b è un divisore di z; dunque z è un multiplo comune di a, b. D'altra parte, è $z \leqslant s$, e, poiché s è il *minimo* comune multiplo di a, b, risulta $z = s$. Abbiamo cosí trovato che è $s =$ m.c.d. (ab, s), cioè che s è un divisore di ab.

Dunque, ai fini della ricerca del m.c.m. (a, b) possiamo limitarci ad esaminare i divisori di $a \cdot b$. Indichiamo con $\mathfrak{D}$ l'insieme dei divisori di $a \cdot b$.

È interessante cercare il m.c.m. mettendo in evidenza una specie di simmetria che esiste in $\mathfrak{D}$, e che scambia fra loro il m.c.d. (a, b) e il m.c.m. (a, b). Vediamo in che modo:

Ad ogni x in $\mathfrak{D}$ possiamo far corrispondere l'intero x' tale che

$$x \cdot x' = a \cdot b \qquad (3)$$

(Ad esempio: se è $a = 12$, $b = 9$, si ha $a \cdot b = 108$, posto $x = 4$ si ha $x' = 27$, ...).

L'applicazione $x \longrightarrow x' = \dfrac{a \cdot b}{x}$ ha queste interessanti proprietà:

— *È involutoria, cioè se ad x corrisponde x', ad x' corrisponde x.* (Ricordare la definizione, nel § 12.3). Questa proprietà è evidente nella relazione (3).

— *Se l'intero c divide s (essendo c ed s elementi di $\mathfrak{D}$), allora c'è un multiplo di s'.*

Infatti supponiamo che sia $s = v \cdot c$, dove v è un intero; dalla relazione $s \cdot s' = a \cdot b$ si ricava allora $v \cdot c \cdot s' = a \cdot b$. Confrontiamo questa relazione con la relazione $c \cdot c' = a \cdot b$; risulta allora $c' = v \cdot s'$, cioè c' è multiplo di s'.

— *Infine, se x cresce x' decresce* [questa proprietà è una evidente conseguenza della (3)].

(Possiamo fare, per inciso, una interessante osservazione: *la seconda proprietà ci dice che la nostra applicazione $x \longrightarrow x'$ è decrescente rispetto alla relazione $\prec$, mentre la terza ci dice che è decrescente rispetto alla relazione $\leqslant$* . Per verificarlo, non c'è che da esprimere la proprietà seconda con il simbolo $\prec$).

Notiamo poi che si ha $a' = b$, $b' = a$. Inoltre, l'applicazione $x \longrightarrow x'$, per la seconda proprietà enunciata, trasforma ogni divisore comune di a e di b in un multiplo comune di a e di b e (come si

vede facendo intervenire la terza proprietà) trasforma il *maggiore* dei divisori comuni di a e b [cioè il m.c.d. (a, b)] nel *minore* dei multipli comuni di a e b [cioè nel m.c.m. (a, b)].

Allora m.c.d. (a, b) *e* m.c.m. (a, b) *si corrispondono nella relazione* (3); *vale dunque l'uguaglianza:*

$$\text{m.c.d.}\ (a, b) \cdot \text{m.c.m.}\ (a, b) = a \cdot b \qquad (4)$$

Quanto abbiamo trovato può essere illustrato dal grafo qui accanto, dove un arco che va da un numero ad un altro indica che il primo è un divisore del secondo:

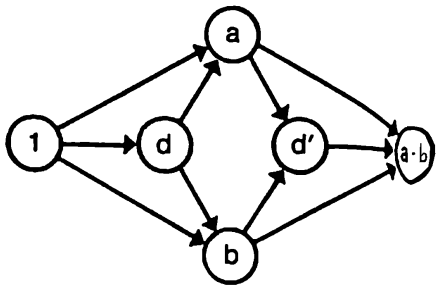


Fig. 4

$[d = \text{m.c.d.}\ (a, b)\ ,\ d' = \text{m.c.m.}\ (a, b)]$

19.6 Nel § 9.4 (del primo volume) abbiamo fatto alcune interessanti osservazioni sul modo con cui si comportano i numeri pari e i numeri dispari nelle ordinarie operazioni algebriche (addizione, moltiplicazione).

Le classi di resti

Abbiamo ricavato enunciati come questo: « *la somma di due numeri dispari è un numero pari* ». In tutti questi enunciati, per determinare la parità o disparità del risultato di un'addizione (o di una moltiplicazione), bastava conoscere la parità degli addendi (o dei fattori rispettivamente). Le tabelle qui riportate compendiano i risultati che avevamo trovato. La lettera P sta per « pari », la lettera D per « dispari ».

+	P	D
P	P	D
D	D	P

·	P	D
P	P	P
D	P	D

Dunque, servendoci delle ordinarie operazioni di addizione e moltiplicazione, abbiamo definito nell'insieme $\{P, D\}$ due operazioni di composizione interna (che indichiamo ancora con i simboli $+$, $\cdot$). Si intuisce che queste operazioni godono entrambe della proprietà commutativa e associativa

e che vale la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione. (Tra poco vedremo una dimostrazione generale; comunque per verificare queste proprietà basta esaminare le nostre tabelle, elencando tutti i casi possibili).

Osservando la tabella dell'addizione si vede subito che P è l'elemento neutro dell'addizione, (cioè lo zero), che l'opposto di D è dato da D stesso (essendo $D + D = P$) e che P coincide con il suo opposto (come accade sempre per l'elemento « zero »). Dalla tabella della moltiplicazione ricaviamo che D è elemento neutro per la moltiplicazione: esso ha un reciproco che coincide con D (come accade sempre per l'unità). Dunque, l'insieme $\{P, D\}$, con le operazioni di composizione interna definite dalle tabelle è un *corpo* (rivedere la definizione data nel § 19.4); P è lo zero e D è l'unità.

Sviluppiamo ora alcune considerazioni, che ci porteranno spontaneamente ad approfondire e a generalizzare l'esempio che abbiamo studiato.

Abbiamo messo tutti i numeri pari in uno stesso insieme, che abbiamo indicato con il simbolo P, e tutti i numeri dispari in uno stesso insieme, che abbiamo indicato con D. Domandiamoci: con quale criterio si può decidere se due numeri sono da porre nello stesso insieme? Se differiscono per un numero pari essi o sono entrambi pari (e quindi entrambi elementi di P) o sono entrambi dispari (e quindi entrambi elementi di D).

A questo punto, teniamo presente la nozione di *relazione di equivalenza*, introdotta nel § 10.1. Una relazione di equivalenza in un insieme è una relazione che gode delle proprietà *riflessiva*, *simmetrica*, *transitiva*; data una relazione di equivalenza, l'insieme viene ripartito in tanti sottoinsiemi di elementi fra loro equivalenti che si dicono *classi di equivalenza*. Indicheremo con il simbolo $[x]$ l'insieme di tutti gli elementi equivalenti ad x, cioè la classe di equivalenza individuata da x.

La particolare relazione di equivalenza che fa al nostro caso è la seguente: *dati nell'insieme* $\mathbf{Z}$ *degli interi relativi due numeri* m , n , *si dice che* m *è equivalente ad* n *se* $m - n$ *è multiplo di* 2 (qui « multiplo di 2 » si intende il prodotto di 2 per un intero *relativo*). Verificheremo che questa relazione ha effettivamente le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Riflessiva: m è equivalente ad m; infatti $m - m = 0$, e 0 è un multiplo di 2.

Simmetrica: se m è equivalente ad n, si ha $m - n = 2r$, dove r è un intero relativo; allora si ha $n - m = -(m - n) = -2r = 2(-r)$.

Poiché anche $2(-r)$ è un multiplo di 2, si può affermare che n è equivalente ad m.

Transitiva: supponiamo che l , m ed n siano interi relativi e che l sia equivalente ad m ed m sia equivalente ad n. Allora si ha: $l - m = 2r$, $m - n = 2s$, essendo r ed s interi relativi. Sommando membro a membro queste due relazioni si ricava: $(l - m) + (m - n) = l - n = 2r + 2s = 2(r + s)$. Dunque $l - n$ è multiplo di 2, cioè l ed n sono equivalenti.

Le classi di equivalenza sono due: la classe P dei numeri pari, che possiamo anche indicare con il simbolo [0], essendo costituita da tutti i numeri equivalenti a 0, e la classe D dei numeri dispari, che possiamo anche indicare con il simbolo [1], essendo costituita da tutti i numeri equivalenti ad 1. Due numeri equivalenti secondo questa relazione verranno detti *congrui fra loro modulo* 2.

L'idea che viene spontanea ora è quella di fare assumere a qualunque intero positivo il ruolo che qui ha avuto il 2. Ad esempio, introduciamo una relazione di equivalenza in cui il protagonista sia il numero 6, ponendo questa definizione:

Due numeri m , n si dicono **congrui** *fra loro modulo* 6 *se la loro differenza è un multiplo di* 6.

Lasciamo al lettore di verificare, esattamente come prima, che la relazione cosí definita (detta relazione di **congruenza** modulo 6) è una relazione di equivalenza, cioè gode delle proprietà *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*. In quante classi di equivalenza viene ripartito l'insieme **Z**? Un'idea buona è quella di utilizzare la divisione con divisore 6. Per ogni intero relativo x si ha

$$x = 6q + r$$

dove q è un intero relativo, e il resto r può essere uno dei valori:

0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5

Evidentemente x è equivalente ad r, dal momento che $x - r$ è un multiplo di 6; dunque, ogni intero relativo è equivalente (cioè congruo modulo 6) ad uno dei 6 numeri scritti; d'altra parte questi 6 numeri non sono certamente congrui fra loro perché la differenza fra due qualsiasi di essi, in valore assoluto, è positiva e non supera 5: perciò non può essere un multiplo di 6.

Dunque, *vi sono esattamente* 6 *classi di equivalenza, fra cui si ripartiscono tutti gli interi relativi. Queste classi possono essere indicate con i simboli:*

[0] , [1] , [2] , [3] , [4] , [5]

e sono dette **classi di resti modulo** 6. Ad esempio, 25 è congruo ad 1 modulo 6, essendo $25 = 6 \cdot 4 + 1$, e si ha $[25] = [1]$ (i numeri 1 e 25, essendo fra loro congrui, individuano la stessa classe di equivalenza perché, per la proprietà transitiva, ogni numero che è congruo a 25 è congruo ad 1).

Analogamente, si ha $[35] = [5]$.

L'insieme formato dalle 6 classi di resti modulo 6 viene indicato con $\mathbf{Z}_6$.

Ora, è molto interessante vedere che le ordinarie operazioni di addizione e moltiplicazione che sono definite in $\mathbf{Z}$ dànno luogo, in modo naturale, ad operazioni analoghe in $\mathbf{Z}_6$, cosí come si è fatto prima con i numeri pari e dispari.

Ad esempio, è naturale porre:

$$[3] + [5] = [8] = [2] \quad ; \quad [3] \cdot [5] = [15] = [3]$$

In generale, viene spontanea la seguente definizione:

$$[a] + [b] = [a + b]$$
$$[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$$

Ma in questa definizione gli addendi (o i fattori) sono classi di equivalenza individuate da un rappresentante (a e b, rispettivamente); perché la nostra definizione sia sensata è essenziale *che il risultato dell'operazione non dipenda dal particolare rappresentante che abbiamo scelto per due classi di resti che fanno da addendi (o da fattori)*.

Prendiamo dunque, in luogo di a, un a' che sia nella stessa classe di resti (cioè che sia congruo di a modulo 6): $a' = a + 6h$ (h intero relativo); analogamente, in luogo di b prendiamo $b' = b + 6k$ (con k intero relativo). Vediamo come varia il risultato dell'addizione:

$$[a'] + [b'] = [a + 6h + b + 6k] =$$
$$= [a + b + 6(h + k)] = [a + b]$$

Dunque come risultato troviamo la stessa classe di resti di prima.

Procediamo in modo analogo per la moltiplicazione:

$$[a'] \cdot [b'] = [a + 6h] \cdot [b + 6k] =$$
$$= [(a + 6h) \cdot (b + 6k)] =$$
$$= [a \cdot b + 6hb + 6ka + 6h \cdot 6k] = [a \cdot b]$$

Anche in questo caso il risultato è quello di prima. Il punto fondamentale su cui si basa la nostra verifica è la seguente constatazione: moltiplicando un multiplo di 6 per un intero *qualsiasi* si ottiene ancora un multiplo di 6. In altre parole, J (6) *è un ideale di* **Z**. (Rivedere la definizione data nel § 19.4).

Cosí la definizione delle operazioni + e · in $\mathbf{Z}_6$ è pienamente accettabile.

A questo punto, è chiaro che le operazioni di addizione e moltiplicazione cosí introdotte in $\mathbf{Z}_6$ «ereditano» molte proprietà dalle operazioni di **Z** da cui derivano. Vediamo, ad esempio come si trasmette la *proprietà commutativa dell'addizione:*

$$[a] + [b] = [a + b] \ , \ [b] + [a] = [b + a]$$

ma in **Z** è $a + b = b + a$, dunque in $\mathbf{Z}_6$ si ha

$$[a] + [b] = [b] + [a]$$

Alla stessa maniera si dimostra che valgono: *la proprietà commutativa della moltiplicazione, la proprietà associativa dell'addizione e della moltiplicazione, la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.* (Scrivere per esteso tutti i passaggi!).

Esiste l'elemento neutro per l'addizione: è la classe [0]; infatti

$$[a] + [o] = [a + 0] = [a]$$

Esiste l'opposto di $[a]$: è $[-a]$; infatti $[a] + [-a] = [a + (-a)] = [0]$

L'opposto di $[a]$ si indicherà con il simbolo consueto $-[a]$.

Ad esempio, $-[5]$ è $[-5]$, che si può anche scrivere $[1]$, dal momento che $[-5] = [-5 + 6] = [1]$.

Esiste anche l'elemento neutro per la moltiplicazione: è la classe $[1]$, naturalmente; infatti $[a] \cdot [1] = [a \cdot 1] = [a]$.

Ritornando al nostro solito elenco delle proprietà formali, possiamo notare che resta solo da esaminare la 8). Domandiamoci, dunque: esiste il reciproco di ogni elemento di $\mathbf{Z}_6$ diverso da $[0]$? Vediamo, ad esempio, se esiste il reciproco di $[2]$: cerchiamo un intero x tale che $[2] \cdot [x] = [1]$, cioè $[2 \cdot x] = [1]$.

I due numeri $2 \cdot x$, 1 , che individuano la stessa classe di resti devono differire per un multiplo di 6: $2x = 1 + 6y$ cioè $2x - 6y = 1$. Ma questo è impossibile perché il primo membro è in ogni caso multiplo di 2, e non può essere uguale ad 1.

Analogamente, non può esistere il reciproco di 3; infatti si otterrebbe l'equazione

$$3x - 6y = 1$$

che non può essere verificata da interi x ed y perché il primo membro rappresenta un multiplo di 3; per analoga ragione non c'è il reciproco di 4. C'è invece il reciproco di 5 perché l'equazione

$$5x - 6y = 1$$

ha soluzioni; ad esempio: $x = -1$, $y = -1$.

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Del resto, si ha $[5] = [5 - 6] = [-1]$ ed è evidente che $[-1]$ è reciproco di se stesso (come $[1]$).

·	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Possiamo concludere che $\mathbf{Z}_6$ *è un anello commutativo con unità*, ma non è un corpo.

Possiamo facilmente compilare le tabelle dell'addizione e della moltiplicazione per $\mathbf{Z}_6$.

Viene spontaneo ora cercare di estendere quanto abbiamo trovato per $\mathbf{Z}_6$ al caso dell'insieme delle classi di resti modulo un intero n positivo qualsiasi:

$$\mathbf{Z}_n = \{[0] , [1] , [2] , \ldots , [n-1]\}$$

Notiamo che, nelle considerazioni che abbiamo svolto prima, le particolari proprietà del numero 6 non intervenivano per nulla, tranne che al momento della discussione della proprietà 8) (esistenza del reciproco).

Dunque, possiamo affermare che, in ogni caso, $\mathbf{Z}_n$ *è un anello commutativo con unità.*

Notiamo che $\mathbf{Z}_1$ si riduce all'unica classe $[0]$, e quindi non ha alcun interesse, mentre $\mathbf{Z}_2$ non è altro che l'anello $\{P , D\} = \{[0] , [1]\}$ da cui abbiamo preso le mosse per il nostro studio.

Probabilmente, nella nostra precedente esperienza matematica abbiamo già fatto conoscenza con qualcuno di questi anelli $\mathbf{Z}_n$, anche se non abbiamo usato questa simbologia. Ad esempio, se sommiamo intervalli di tempo espressi da numeri interi di ore su un quadrante di orologio, non facciamo altro che sommare in $\mathbf{Z}_{12}$.

Come altro esempio di cosa già nota, possiamo citare la famosa «*prova del* 9» che si fa per controllare l'esattezza delle ordinarie operazioni aritmetiche, con numeri scritti in forma decimale,

essa utilizza la struttura algebrica di $\mathbf{Z}_9$. Vediamo in dettaglio come si procede. Per evitare confusioni scriveremo $[x]_9$ per indicare la classe di resti di x modulo 9. Osserviamo allora che si ha $[10]_9 = [9 + 1]_9 = [1]_9$; inoltre è $[10 \cdot 10]_9 = = [10]_9 \cdot [10]_9 = [1]_9 \cdot [1]_9 = [1]_9$ · Analogamente, per una qualsiasi potenza 10^k di 10, si ha

$$[10^k]_9 = \underbrace{[10 \cdot 10 \cdot \quad \cdot 10]_9}_{k \text{ volte}} =$$

$$= [1]_9 \cdot [1]_9 \cdot \quad \cdot [1]_9 = [1]_9$$

Consideriamo ora un qualsiasi intero scritto in forma decimale, ad esempio: 365. Si ha

$$[365]_9 = [3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 5]_9 = [3 \cdot 10^2]_9 +$$

$$+ [6 \cdot 10]_9 + [5]_9 = [3]_9 \cdot [10^2]_9 + [6]_9 \cdot [10]_9 +$$

$$+ [5]_9 = [3]_9 \ [1]_9 + [6]_9 \cdot [1]_9 + [5]_9 =$$

$$= [3]_9 + [6]_9 + [5]_9 = [3 + 6 + 5]_9 = [5]_9$$

Dunque, in generale: *la classe di resti modulo* 9 *di un qualsiasi intero positivo è uguale alla classe di resti della somma delle sue cifre decimali.*

Ecco allora in che consiste la « prova del nove »: nel fare, per controllo, le operazioni, con le classi di resti degli operandi (addendi o fattori), modulo 9. Naturalmente, il controllo di verifica potrebbe essere condotto eseguendo le operazioni in $\mathbf{Z}_n$ con n qualsiasi: ma nel caso $n = 9$, se i numeri sono dati in forma decimale, il calcolo delle classi di resti si fa in forma particolarmente agile, come si è visto. Ad esempio: vogliamo eseguire un controllo sulla moltiplicazione:

$$365 \cdot 286 = 104 \cdot 390$$

Passiamo alle classi di resti modulo 9: $[365]_9 =$

$= [5]_9$, $[286]_9 = [16]_9 = [7]_9$. Facciamo la moltiplicazione in $\mathbf{Z}_9$:

$$[5]_9 \cdot [7]_9 = [35]_9 = [8]_9$$

Effettivamente è $[104 \cdot 390]_9 = [8]_9$; dunque si può sperare che il calcolo sia stato eseguito correttamente.

Poniamoci ora in termini generali la domanda a cui, per $\mathbf{Z}_6$, abbiamo risposto negativamente. Domandiamoci, cioè: vi sono degli anelli $\mathbf{Z}_n$ in cui esiste il reciproco di ogni elemento non nullo? In altre parole: ci sono degli interi n per cui $\mathbf{Z}_n$ risulta un corpo?

Un elemento non nullo di $\mathbf{Z}_n$ è dato da $[a]$ con $0 < a < n$.

Se $[x]$ è il reciproco di $[a]$, deve essere:

$$[x] \cdot [a] = [1]$$

cioè

$$xa = 1 + yn$$

ovvero

$$xa - yn = 1 \qquad (5)$$

Questa è la stessa equazione che avevamo trovato prima nel caso particolare $n = 6$, $a = 2, 3, 4, 5$).

È chiaro che se a ed n hanno un divisore $d > 1$ comune questa equazione non ha soluzione, dal momento che il primo membro è in ogni caso un multiplo di d e perciò non può essere uguale ad 1. Dunque, se n è un numero composto, la (5) non ha soluzione in corrispondenza dei valori di a (con $1 < a < n$) che sono divisori di n. Concludiamo: *se n è composto, $\mathbf{Z}_n$ non è un corpo.* Questo accadeva appunto nel caso $n = 6$, che abbiamo studiato sopra.

Supponiamo ora che n *sia uguale ad un numero primo* p. Allora, essendo $0 < a < p$, si ha m.c.d. $(a, p) = 1$. Ma abbiamo visto nel § 19.4 che il massimo comun divisore di due interi si può esprimere come loro combinazione lineare a coefficienti interi: indicando con x e $-y$ i coefficienti di questa combinazione lineare, si vede che la (5) ha soluzioni.

Possiamo concludere cosí la nostra ricerca:

L'anello $\mathbf{Z}_n$ *è un corpo quando* n *è un numero primo, e solamente in quel caso.*

Vocaboli e simboli

a è **multiplo** di b, b è **divisore** di a, b **divide** a
numeri **composti**, numeri **primi**
fattorizzazione
massimo comun divisore di a e b : m.c.d. (a, b)
interi **primi fra loro**
algoritmo
operazioni di **composizione interna**
corpo (campo)
anello (commutativo; con unità)
ideale $\mathfrak{J}(n)$, $\mathfrak{J}(a, b)$
ordinamento (relazione d'ordine)
proprietà **riflessiva, antisimmetrica, transitiva**
ordinamento **totale** (o **lineare**) elemento **massimo**
ordinamento per divisibilità $\prec$
minimo comun multiplo di a, b: m.c.m. (a, b)
numeri a, b **congrui** fra loro modulo n
relazione di **congruenza**
classi di resti modulo n, $[x]_n$; $\mathbf{Z}_n$
combinazione lineare, coefficienti di una combinazione lineare

Esercizi

1 Consideriamo le operazioni di addizione e moltiplicazione degli interi naturali, scritti in base 10, occupandoci solo dell'ultima cifra (cifra « delle unità »).

Come si comporta questa cifra? (Cioè: l'ultima cifra del risultato come dipende dall'ultima cifra degli operandi?).

2 Calcolare le successive potenze di [2] e di [3] in $\mathbf{Z}_5$. Calcolare le successive potenze di [2] e di [3] in $\mathbf{Z}_8$.

3 Giustificare il ben noto criterio di divisibilità per 3 di un numero scritto in forma decimale.

* **4** È noto il seguente criterio di divisibilità per 11: un numero scritto in forma decimale è divisibile per 11 se e solo se la somma delle citre di posto pari è uguale alla somma delle cifre di posto dispari, o ne differisce per un multiplo di 11. Giustificarlo. Come si potrebbe formulare una «prova dell'11» per le operazioni aritmetiche analoga alla «prova del 9»?

* **5** Dimostrare che il numero $2^{65} + 1$ è divisibile per 11. (Cercare una potenza di 2 che sia il piú possibile vicina ad un multiplo di 11).

* **6** Eseguiamo la «prova del nove» in un certo calcolo. Se il risultato è sfavorevole, possiamo essere certi che il calcolo è sbagliato? Se il risultato è favorevole, possiamo essere certi che il calcolo sia esatto, oppure possiamo solo dire che «probabilmente» è esatto?
(Si ammette che nel fare la «prova del 9» non si commettano errori; questo esercizio può dar luogo a qualche libera riflessione...).

7 Scrivere per esteso la tabella dell'addizione e della moltiplicazione di $\mathbf{Z}_7$. Da queste tabelle ricavare la tabella dell'«opposto» e del «reciproco».

8 Se n è un numero composto, in $\mathbf{Z}_n$ esistono coppie di elementi non nulli che hanno prodotto nullo: trovarle. Non vale dunque in $\mathbf{Z}_n$, quando n è composto, la «legge di annullamento del prodotto» che vale sempre in un corpo. (Rivedere l'esercizio 6 del § 8.3). Anche per questa via si vede dunque che $\mathbf{Z}_n$ non è un corpo quando n è composto.

9 Nell'insieme $\mathcal{R}$ dei numeri reali introduciamo una relazione di equivalenza in questo modo: fissato un numero reale $a > 0$, diciamo che i numeri reali x, x' sono equivalenti se differiscono per un multiplo di a, cioè se $x - x' = ma$, essendo m un intero relativo. Indichiamo con $\mathbf{R}_a$ l'insieme delle classi di equivalenza, verificare che si può introdurre l'addizione cosí come si è fatto in $\mathbf{Z}_n$. Non si può invece definire la moltiplicazione: dov'è l'intoppo?

10 Risolvere in $\mathbf{Z}_5$ l'equazione $[3]\cdot x = [4]$.

11 In $\mathbf{Z}_{20}$ sono risolubili le equazioni:

$[3]\cdot x = [4]$, $[5]\cdot x = [10]$, $[5]\cdot x = 9$?

12 Delle equazioni dell'esercizio precedente cercare *tutte* le soluzioni.

** **13** Ricordiamo che $\mathbf{Z}^2 = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ indica l'insieme delle coppie di interi relativi e si rappresenta, nel piano cartesiano, mediante l'insieme H dei punti che hanno entrambe le coordinate intere.
Consideriamo ora l'applicazione $\mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}^2$ cosí definita:

$(x , y) \longrightarrow (ax + by , a'x + b'y)$

dove a , b , a' , b' sono interi relativi. Per quali valori di a , b , a' , b' questa applicazione è iniettiva, surgettiva, bigettiva?
[Per la surgettività, è opportuno notare che i punti (1 , 0) e (0 , 1) devono appartenere all'immagine della nostra applicazione: da questo si può dedurre che è $ab' - a'b = 1$, oppure $ab' - a'b = -1$].

* **14** Riprendiamo la successione di Fibonacci: 0 , 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , . . . in cui ogni termine, a partire dal terzo, è la somma dei due che lo precedono. Dimostrare che, in ogni gruppo di quattro termini consecutivi, uno è divisibile per 3.

** **15** Considerare le classi di resti modulo n (con n qualsiasi) dei termini della successione di Fibonacci. Dimostrare che esse costituiscono una successione periodica.

* **16** Abbiamo osservato (nel § 19.1) che fra i numeri primi vi sono *coppie* di numeri primi gemelli. Vi possono essere *terne* di numeri primi gemelli? (Cioè terne di numeri primi di cui quello centrale supera di 2 il minore ed è inferiore di 2 del maggiore).
Quante?

20

Rotazioni, angoli

20.1 Ci proponiamo di esporre alcune proprietà fondamentali delle isometrie, che si possono facilmente dedurre dalla loro definizione (sarà opportuno rivederla, nel § 14.1).

Alcune proprietà delle isometrie

Un'isometria non solo trasforma una qualsiasi retta $\mathcal{R}$ in una retta $\mathcal{R}'$ (§ 14.1, teorema II), ma trasforma un semipiano $\mathcal{E}_1$ avente come bordo $\mathcal{R}$ in un semipiano $\mathcal{E}'_1$ con bordo $\mathcal{R}'$ (e, naturalmente, trasforma il semipiano opposto $\mathcal{E}_2$ nel semipiano opposto $\mathcal{E}'_2$). Infatti, se P e Q sono punti che appartengono ad uno stesso semipiano con bordo $\mathcal{R}$, il segmento $[P, Q]$ non taglia la retta $\mathcal{R}$; esso viene trasformato in un segmento $[P', Q']$ che non taglia la retta $\mathcal{R}'$; perciò P' e Q' sono, rispetto ad $\mathcal{R}'$, in uno stesso semipiano.

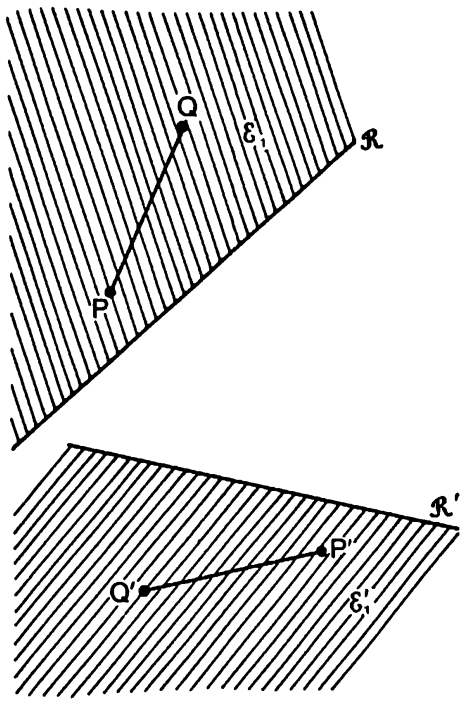


Fig. 1

Il seguente teorema è molto importante perché ci dice da quali elementi può essere determinata un'isometria.

I - *È unica l'isometria che manda due punti A, B di una retta $\mathcal{R}$ in due punti A', B'* (rispettivamente) *di una retta $\mathcal{R}'$ e che manda uno dei due semipiani con bordo $\mathcal{R}$ in un fissato semipiano con bordo $\mathcal{R}'$.*

Prima di procedere alla dimostrazione, occorre capire bene l'enunciato. In matematica, quando affermiamo che un certo ente è **unico** vogliamo dire che non ce ne sono due, o tre, o piú ancora; non escludiamo però che non ce ne sia nessuno...,

cioè non facciamo alcuna affermazione riguardo all'**esistenza** di quell'ente. Nel nostro caso, la dimostrazione dell'esistenza di un'isometria con le proprietà volute dal nostro enunciato verrà fatta fra poco. (Teorema IV).

Veniamo dunque alla dimostrazione del teorema I: supponiamo che vi siano due isometrie f, g che mandano A in A', B in B' e che mandano il semipiano $\mathcal{E}_1$ di $\mathcal{R}$ nel semipiano $\mathcal{E}'_1$ di $\mathcal{R}'$. Se, per assurdo, queste isometrie non coincidono, vi sarà almeno un punto P che esse trasformano in modo diverso; sia $f(P) = P'$, $g(P) = P^*$ con $P' \neq P^*$. Per la definizione di isometria si ha $\overline{P'A'} = \overline{P^*A'}$, essendo $\overline{P'A'} = \overline{PA}$, $\overline{P^*A'} = \overline{PA}$. Analogamente si ha $\overline{P'B'} = \overline{P^*B'}$.

Ma allora i punti A' e B' sarebbero sull'asse del segmento $[P', P^*]$ (§ 14.3, teorema I); quindi i punti P', P^* starebbero in semipiani opposti rispetto alla retta $\mathcal{R}'$, ciò che è assurdo perché il punto P o appartiene ad $\mathcal{R}$ (e allora viene mandato in $\mathcal{R}'$) o appartiene ad uno dei due semipiani di $\mathcal{R}$, ad esempio ad $\mathcal{E}_1$: e allora, per ipotesi è trasformato in un punto di $\mathcal{E}'_1$ tanto dalla f quanto dalla g ■

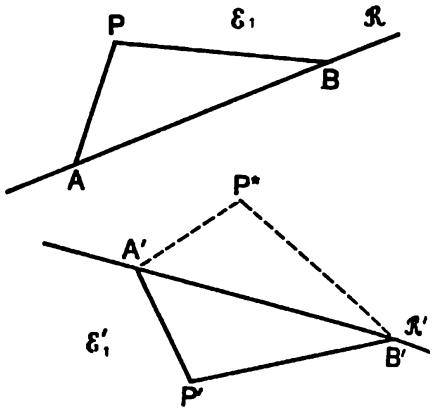


Fig. 2

Da questo teorema si deducono alcune importanti conseguenze:

II - *Un'isometria che lascia fermi due punti A, B, o è l'identità oppure la simmetria avente come asse la retta AB.*

Sappiamo già che la simmetria di asse AB scambia fra loro i due semipiani generati dalla retta AB. Per il teorema precedente, una isometria f tale che $f(A) = A, f(B) = B$ o scambia fra loro i semipiani generati dalla retta AB, e allora coincide con la simmetria di asse AB, o non li scambia, e allora coincide con l'identità ■

III - *Un'isometria che lascia fermi tre punti non allineati A, B, C è necessariamente l'identità.*

Infatti se l'isometria f lascia fermi i punti A e B, essa è l'identità o la simmetria di asse AB. Ma poiché il punto C non sta sulla retta AB e poiché è $f(C) = C$, è chiaro che f trasforma in sé il semipiano contenente il punto C. Allora, per il teorema precedente essa è l'identità ■

Ed ecco il risultato riguardante l'esistenza delle isometrie:

IV - *Dati due punti A, B di una retta $\mathcal{R}$ e due punti $A'B'$ di una retta $\mathcal{R}'$, con $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, e fissato un semipiano $\mathcal{E}_1$ con bordo $\mathcal{R}$ ed un semipiano $\mathcal{E}'$ con bordo $\mathcal{R}'$, esiste un'isometria f che manda A in A', B in B' e trasforma $\mathcal{E}_1$ in $\mathcal{E}'_1$. Questa isometria si può ottenere componendo non piú di tre simmetrie assiali.*

Questo teorema è veramente importante: ci dice che, per avere a disposizione tutte quelle isometrie che la nostra intuizione ci suggerisce, bastano i due assiomi A7 ed A8 (§ 14.2) riguardanti l'esistenza di simmetrie assiali. Con le simmetrie assiali si fa tutto.

Veniamo alla dimostrazione: per esprimere graficamente il complesso di dati costituito da una coppia di punti distinti (A, B) e da uno dei due semipiani generati dalla retta AB è comodo servirsi di una bandierina; l'asta ha il piede in A ed ha la punta, a cui è fissato il drappo, in B; il drappo stesso indica il semipiano prescelto. Allora, la dimostrazione del nostro teorema si riduce a far vedere che date due bandierine (con l'asta di uguale lunghezza) si può portare la prima a sovrapporsi alla seconda attraverso una successione di simmetrie assiali (in numero non superiore a tre). Potremo indicare con $(A, B, \mathcal{E}_1)$ la prima bandierina, con $(A', B', \mathcal{E}'_1)$ la seconda; la costruzione può svilupparsi in tre mosse:

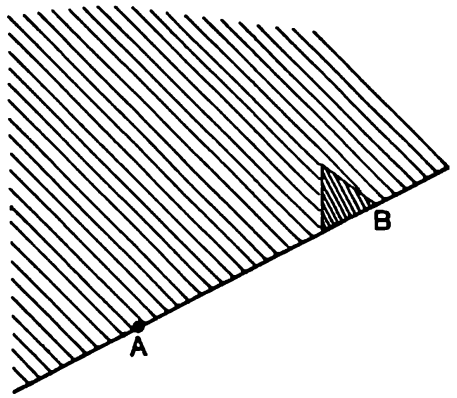


Fig. 3

1ª *mossa.* Se è $A \neq A'$, eseguiamo la simmetria assiale che scambia fra loro A ed A'; l'asse sarà la retta $\mathcal{S}$ che è asse del segmento $[A, A']$. Il punto B va a finire in un certo punto B''.

Naturalmente, se è $A = A'$ questa mossa viene saltata.

2ª *mossa.* Se le semirette $A'B'$ ed $A'B''$ non coincidono (cioè se le aste delle due bandierine non coincidono) si fa una simmetria che porta la semiretta $A'B''$ a coincidere con la semiretta $A'B'$.

(Vedere il § 14.3: questa simmetria ha come asse la retta $\mathfrak{C}$ bisettrice dell'angolo $B'\widehat{A'}B''$).

Naturalmente se le aste coincidono già, la mossa si salta.

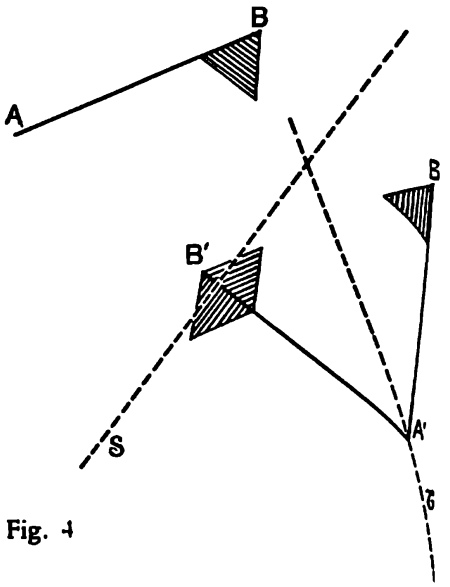


Fig. 4

3ª *mossa.* Ormai le aste delle bandierine coincidono, ma può darsi che i drappi delle bandierine siano opposti. Basta allora applicare una simmetria avente come asse la retta $A'B'$ per fare sovrapporre anche i drappi delle bandierine.

In conclusione, eseguendo la composizione

$$f = s_{\mathcal{R}'} \circ s_{\mathfrak{C}} \circ s_{\mathfrak{S}}$$

(o anche di un numero minore di simmetrie assiali), abbiamo trasformato la bandierina $(A, B, \mathcal{E}_1)$ nella bandierina $(A', B', \mathcal{E}'_1)$. Pertanto f, che è un'isometria essendo composta di isometrie, manda A in A', B in B' e il semipiano $\mathcal{E}_1$, nel semipiano $\mathcal{E}'_1$. Cosí il teorema è dimostrato ■

Esercizi

1 Quali sono le possibili isometrie che trasformano una retta $\mathcal{R}$ in una retta $\mathcal{R}'$ e che mandano un punto A di $\mathcal{R}$ in un punto A' assegnato di $\mathcal{R}'$?

2 Quali sono le possibili isometrie che scambiano fra loro due punti P, P'? $(P \neq P')$.

3 Rappresentare mediante una composizione di simmetrie assiali tutte le isometrie che trasformano in sé: *a*) un triangolo equilatero, *b*) un quadrato, *c*) una svastica.

4 Un'isometria è involutoria se e soltanto se è l'identità o è una simmetria. Dimostrarlo.

Ed ora presentiamo alcuni esercizi di calcolo sulle isometrie; non ci sono particolari difficoltà: solamente si tratta di calcoli un po' lunghi. Occorre programmarli prima con chiarezza e poi svolgerli con cura.

5 Data, in un riferimento cartesiano, una retta $\mathcal{R}$ passante per l'origine, di equazione $ax + by = 0$, trovare il punto $P' \leftrightarrow (x', y')$ corrispondente di $P \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (x, y)$ in una simmetria di asse $\mathcal{R}$. (Tenere conto che la retta PP' deve essere ortogonale ad $\mathcal{R}$, e che il punto di mezzo del segmento $[P, P']$ si deve trovare su $\mathcal{R}$).

6 Rappresentare analiticamente l'isometria che si ottiene componendo la simmetria descritta nell'esercizio precedente con una simmetria avente come asse una retta S per l'origine ortogonale ad $\mathcal{R}$. (Il risultato finale è scontato, ma si chiede di fare i calcoli egualmente per allenamento...).

7 Trovare l'equazione della retta che si ottiene trasformando la retta $x = 2$ mediante una simmetria che ha per asse la retta $ax + by = 0$.

Le rotazioni

20.2 C'è ancora una classe molto importante di isometrie che merita di essere studiata: quella delle rotazioni. Possiamo avere l'idea intuitiva di una rotazione in questo modo: sovrapponiamo due fogli di carta e fissiamoli al tavolo con uno spillo, in un punto solo. Lasciando fermo il foglio inferiore, muoviamo quello superiore attorno allo spillo. Compiuto il movimento, un punto P si è portato in un punto P': la nozione di rotazione, che ora introdurremo, ha lo scopo di descrivere l'applicazione $P \longrightarrow P'$.

Possiamo aggiungere che la nostra esperienza quotidiana ci fornisce innumerevoli esempi di moti rotatori (la ruota è forse l'elemento piú importante e originale della tecnologia umana). Tuttavia dobbiamo precisare che *parlando di rotazione non vogliamo riferirci alle fasi intermedie di un moto rotatorio, ma solo al risultato finale del moto.*

Queste considerazioni intuitive ci portano a porre la seguente definizione:

Dato un punto O del piano, si dice **rotazione** *di* **centro** *O un'isometria che lascia fisso il solo punto O.*

Fra le rotazioni si deve includere anche l'identità (che lascia fissi tutti i punti del piano). Essa è stata inclusa anche fra le traslazioni; naturalmente, ogni punto del piano può essere considerato centro di rotazione per l'identità.

Come ogni isometria, una rotazione si può ottenere componendo simmetrie assiali; il teorema che segue ci precisa in che modo questo si può fare e, nello stesso tempo, ci assicura che la nostra definizione ha colto perfettamente la nostra idea intuitiva.

I - *Date due semirette* $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ *con origine in O, esiste una ed una sola rotazione con centro O che porta* $\mathcal{R}$ *in* $\mathcal{R}'$.

Il teorema afferma l'esistenza e l'unicità della rotazione; la dimostrazione sarà perciò divisa in due fasi:

Esistenza. Costruiamo una simmetria assiale che scambia fra loro le semirette $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$: è la simmetria avente come asse $\mathcal{C}$ la bisettrice dell'angolo $(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$. Questa non è una rotazione perché lascia fermi tutti i punti di $\mathcal{C}$ e muove tutti gli altri punti del piano.

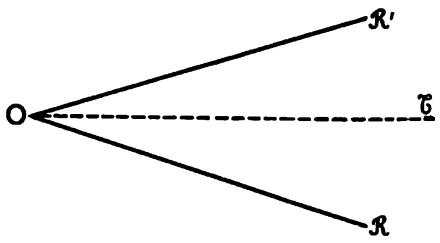


Fig. 5

Eseguiamo successivamente una simmetria di asse $\mathcal{R}'$; dimostreremo che l'isometria

$$g = s_{\mathcal{R}'} \circ s_{\mathcal{C}}$$

è la rotazione cercata: anzitutto è evidente che $\mathcal{R}$ viene trasformata in $\mathcal{R}'$, dal momento che nella seconda simmetria $\mathcal{R}'$ non si muove. Dimostriamo ora che g è effettivamente una rotazione.

Consideriamo dapprima il caso banale in cui $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ coincidano: allora è $\mathcal{C} = \mathcal{R} = \mathcal{R}'$ e la g è l'identità (che abbiamo incluso fra le rotazioni). Supponiamo ora che sia $\mathcal{R} \neq \mathcal{R}'$ e vediamo se g può avere punti fissi diversi da O. Sia $P = g(P) = s_{\mathcal{R}'} \circ s_{\mathcal{C}}(P) = s_{\mathcal{R}'}(s_{\mathcal{C}}(P))$, con $P \neq O$. Poniamo $s_{\mathcal{R}}(P) = Q$. Allora valgono le relazioni:

$$s_{\mathcal{R}'}(Q) = P \ , \ s_{\mathcal{C}}(P) = Q$$

La prima ci dice che la retta $\mathcal{R}'$ è asse di simmetria del segmento $[P, Q]$; la seconda ci dice che la retta $\mathcal{C}$ è asse del segmento $[P, Q]$. Poiché l'asse del segmento è unico, si ha $\mathcal{R}' = \mathcal{C}$; ma questa relazione ci dice che, essendo $\mathcal{R}$ ad $\mathcal{R}'$ simmetriche rispetto a $\mathcal{C}$, deve essere $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$, contrariamente a quello che avevamo supposto. Dunque se è $\mathcal{R} \neq \mathcal{R}'$ non ci sono punti fissi oltre O: la g è una rotazione ■

Unicità. Domandiamoci se può esistere un'altra rotazione, oltre la g che abbiamo trovato, che porti $\mathcal{R}$ in $\mathcal{R}'$. Prendiamo su $\mathcal{R}$ un punto $A \neq O$ e su $\mathcal{R}'$ un punto A' tale che $\overline{OA'} = \overline{OA}$.

Ogni isometria che porta $\mathcal{R}$ su $\mathcal{R}'$ lascia fermo O e porti A in A'; quante sono allora le isometrie che lasciano fermo O e portano A in A'?

Il teorema II del § precedente ci dice che ce ne sono due; nel nostro caso, ne conosciamo effettivamente due: la simmetria $s_{\mathcal{R}}$ e la rotazione $g = s_{\mathcal{R}'} \circ s_{\mathcal{C}}$. Ma, come abbiamo notato, $s_{\mathcal{C}}$ non è una rotazione.

Dunque l'unica rotazione esistente è la g. Così la nostra dimostrazione è finita ■

Osserviamo che, *mentre è unica la rotazione che porta $\mathcal{R}$ in $\mathcal{R}'$, non è unica la coppia di simmetrie che genera tale rotazione.* Ad esempio, per ottenere una rotazione che porti $\mathcal{R}$ in $\mathcal{R}'$ si potrebbe eseguire prima una simmetria di asse $\mathcal{R}$ e poi una simmetria di asse $\mathcal{C}$; dunque risulta $g = s_{\mathcal{C}} \circ s_{\mathcal{R}}$.

Dalla dimostrazione del teorema ricaviamo che la composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti è, in ogni caso, una rotazione perché lascia fisso il solo punto di incidenza degli assi. È interessante il caso in cui questi assi sono ortogonali fra loro: sappiamo che in questo caso la composizione delle due simmetrie assiali è una simmetria centrale con centro nel punto di incontro (§ 14.4). Dunque *una simmetria centrale è una particolare rotazione.* (Intuitivamente: una rotazione di un angolo piatto).

Esaminiamo ora con cura i legami che vi sono fra la nozione di rotazione, che ora abbiamo introdotto, e quella di angolo (che abbiamo dato nel § 13.5). Ricordiamo che, per definizione, *un angolo con vertice in O è una coppia* $(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$ *di semirette con origine in O.*

Insistiamo sul fatto che il termine «coppia» allude ad un ordine che c'è fra gli elementi della coppia; è vero che in molte questioni geometriche l'ordine con cui sono assegnati i lati di un angolo è irrilevante, ma, ai fini di quello che ci interessa ora, l'ordine è importante. *Ad ogni angolo* $(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$ *con vertice O facciamo corrispondere la rotazione con centro O che manda la semiretta* $\mathcal{R}$ *nella semiretta* $\mathcal{R}'$.

Questa corrispondenza degli angoli con le rotazioni è surgettiva, ma non iniettiva perché una data rotazione con centro O può essere individuata da un angolo $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$, dove il lato $\mathcal{S}$ è scelto ad arbitrio, ed il lato $\mathcal{S}'$ è il trasformato di $\mathcal{S}$ nella rotazione: dunque le coppie $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ che individuano la rotazione sono infinite. Possiamo fissare una volta per tutte la semiretta $\mathcal{S}$, e allora le rotazioni con centro O sono poste in corrispondenza biunivoca con le semirette $\mathcal{S}'$ uscenti da O. Ad esempio, possiamo introdurre un sistema di assi cartesiani con origine in O; possiamo assumere come semiretta di riferimento $\mathcal{S}$ il semiasse positivo $\mathcal{X}^+$. Così le rotazioni sono poste in corrispondenza biunivoca con le semirette uscenti da O; a loro volta, le semirette uscenti da O tagliano in un solo punto il cerchio con centro

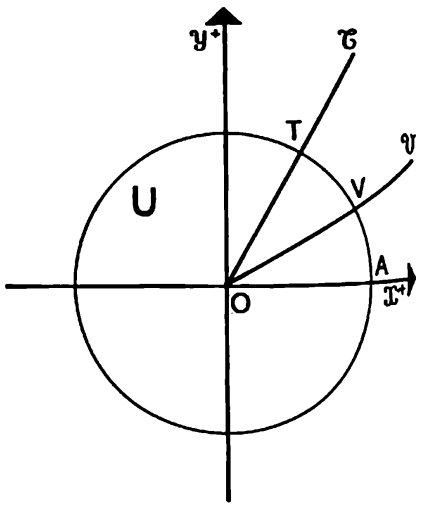


Fig. 6

in O e raggio 1, e possono essere messe cosí in corrispondenza biunivoca con i punti del cerchio. Questo cerchio verrà indicato d'ora in poi con il simbolo **U**.

Vi sono ancora due importanti proprietà delle rotazioni:

II - *La composizione di due rotazioni con centro O è una rotazione con centro O.*

Infatti, supponiamo che la prima rotazione, f, mandi la semiretta $\mathcal{R}$, con origine O, nella semiretta $\mathcal{T}$ e che la seconda rotazione, g, mandi la semiretta $\mathcal{T}$ nella semiretta $\mathcal{U}$. La prima rotazione si può rappresentare, come si è visto, cosí:

$$f = s_{\mathcal{T}} \circ s_{\mathcal{M}}$$

dove $s_{\mathcal{M}}$ è la simmetria avente come asse la bisettrice $\mathcal{M}$ dell'angolo $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ e $s_{\mathcal{T}}$ è la simmetria di asse $\mathcal{T}$.

La seconda rotazione può essere rappresentata cosí:

$$g = s_{\mathcal{N}} \circ s_{\mathcal{T}}$$

dove $s_{\mathcal{N}}$ è la simmetria avente come asse la bisettrice $\mathcal{N}$ dell'angolo $(\mathcal{T}, \mathcal{U})$: infatti, teniamo presente che la composizione di due simmetrie con assi incidenti è, in ogni caso, una rotazione, come abbiamo notato: si verifica poi subito che la rotazione $s_{\mathcal{N}} \circ s_{\mathcal{T}}$ porta la semiretta $\mathcal{T}$ nella $\mathcal{U}$. A questo punto non resta che da comporre (in questo ordine) la f con la g:

$$g \circ f = s_{\mathcal{N}} \circ s_{\mathcal{T}} \circ s_{\mathcal{T}} \circ s_{\mathcal{M}} = s_{\mathcal{N}} \circ s_{\mathcal{M}}$$

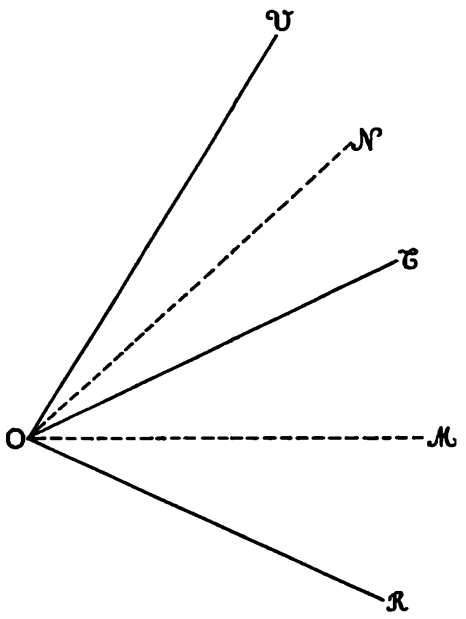


Fig. 7

infatti, essendo ogni simmetria involutoria, si ha $s_{\mathfrak{C}} \circ s_{\mathfrak{C}} = I$ (identità). Risulta allora evidente che $g \circ f$, essendo prodotto di due simmetrie con assi incidenti in O, è una rotazione con centro O.

III - *L'inversa di una rotazione è una rotazione.*

Supponiamo che una rotazione f mandi la semiretta $\mathfrak{R}$ con origine O nella semiretta $\mathfrak{C}$; evidentemente la rotazione inversa sarà la rotazione h che manda la semiretta $\mathfrak{C}$ nella semiretta $\mathfrak{R}$.

Infatti, $h \circ f$ è una rotazione, per il teorema precedente, e manda $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}$: non può essere che l'identità; analogamente $f \circ h$ manda $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{C}$ e non può essere che l'identità ■

È interessante osservare che *l'inversa di una rotazione* $s_1 \circ s_2$ (*dove* s_1 *ed* s_2 *sono simmetrie con assi incidenti*) *si può scrivere* $s_2 \circ s_1$ *cioè si può rappresentare semplicemente invertendo l'ordine nel prodotto di composizione.* Verifichiamolo:

$(s_2 \circ s_1) \circ (s_1 \circ s_2) = s_2 \circ (s_1 \circ s_1) \circ s_2 = s_2 \circ s_2 = \mathrm{I}$ (identità)

(Occorre ricordare che per la composizione delle applicazioni vale la proprietà associativa, in ogni caso, e che le simmetrie assiali sono involutorie).

Analogamente si ha

$(s_1 \circ s_2) \circ (s_2 \circ s_1) = s_1 \circ (s_2 \circ s_2) \circ s_1 = s_1 \circ s_1 = \mathrm{I}$ (identità)

Ora, procedendo in analogia con quanto abbiamo fatto nello studio delle traslazioni, dovremmo trovare la rappresentazione cartesiana di una rotazione. Tuttavia conviene rimandare questo problema perché piú avanti saremo in grado di risolverlo con strumenti piú adeguati.

Esercizi

(*Per molti degli esercizi qui presentati un elemento importante è l'esecuzione accurata e intelligente del disegno*)

1 Data una rotazione di centro O mediante l'angolo $(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$ costruire graficamente la semiretta S' corrispondente di una semiretta S assegnata con origine in O.

* **2** Dati nel piano due segmenti di uguale lunghezza $[A, B]$, $[A', B']$, esiste sempre una rotazione che manda A in A' e B in B'? (Per cominciare, si può pensare alla costruzione impiegata nel teorema IV del § precedente).

3 Dati nel piano un punto O, un punto $P \neq O$ ed una retta $\mathcal{R}$, costruire una rotazione con centro O che porti il punto P in un punto della retta $\mathcal{R}$. (Vi sono sempre soluzioni? Quante?).

* **4** Un'isometria che sia prodotto di tre simmetrie assiali con assi passanti per uno stesso punto è una simmetria assiale. (L'isometria assegnata sia $f = s_3 \circ s_2 \circ s_1$: l'isometria $s_3 \circ s_2$ è una rotazione, e si può esprimere in modo opportuno...). Dare anche una risoluzione grafica del problema.

5 Dimostrare che il prodotto di due simmetrie assiali non può in nessun caso essere uguale ad una simmetria assiale.

** **6** Il prodotto di due rotazioni con centri diversi è una rotazione? (Rappresentare ciascuna delle due rotazioni mediante un'opportuna coppia di simmetrie assiali).

** **7** Dato un angolo $(\mathcal{R}, S)$ ed un punto P ad esso interno, costruire un triangolo equilatero che ha un vertice in P, un vertice sul lato $\mathcal{R}$ ed un vertice sul lato S. Il problema ha sempre soluzione?

* **8** Dimostrare che il prodotto di quattro simmetrie assiali è in ogni caso uguale al prodotto di due simmetrie assiali. (Occorre ricordare che anche le traslazioni si rappresentano mediante il prodotto di due simmetrie assiali; cfr. § 16).

* **9** Dimostrare che il prodotto di *tre* simmetrie assiali non può in nessun caso essere uguale al prodotto di *due* simmetrie assiali.

* **10** Tirando le conclusioni da diversi esercizi precedenti dimostrare che non esiste alcuna isometria che si possa rappresentare sia con un numero *pari* che con un numero *dispari* di simmetrie assiali.

* **11** Un'automobile sta compiendo una curva; data l'inclinazione della ruota anteriore sinistra, determinare graficamente l'inclinazione della ruota anteriore destra.

Gli angoli: ordinamento e misura

20.3 La nozione di **angolo**, introdotta in modo piuttosto stringato nel § 13.5 e ripresa nel § precedente, è di importanza essenziale sia all'interno della matematica sia nelle applicazioni della matematica alle altre scienze e alla tecnica. Dobbiamo perciò studiarla con maggiore profondità.

Ricordiamo che all'angolo $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$, introdotto come coppia di semirette, noi associamo una **regione angolare** (che, correntemente, viene detta essa stessa angolo) la quale, se $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ non sono allineate, è costituita dall'intersezione dei due semipiani:

semipiano generato da $\mathcal{R}$ e contenente $\mathcal{S}$
semipiano generato da $\mathcal{S}$ e contenente $\mathcal{R}$

Nel caso che $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ siano allineate (angolo piatto) vi è ambiguità: si può scegliere come regione angolare l'uno o l'altro dei due semipiani individuati dai lati.

Nello studio degli angoli ci può essere di guida l'analogia con i segmenti: un segmento $[A, B]$ è assegnato mediante gli estremi e contiene i punti che stanno fra gli estremi; per questi punti si possono introdurre due relazioni di ordine, fra loro opposte. Inoltre per i segmenti si può introdurre una misura (o lunghezza).

Per analogia, siamo portati a considerare, in un angolo $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ avente come vertice O, tutte le semirette con origine in O *interne* all'angolo. Conviene (per quello che si farà successivamente) considerare un angolo piatto ottenuto fissando un punto O su una retta $\mathfrak{X}$ e scegliendo uno dei due semipiani; indichiamo con $\mathfrak{X}^+$ ed $\mathfrak{X}^-$ le due semirette in cui $\mathfrak{X}$ viene suddivisa da O.

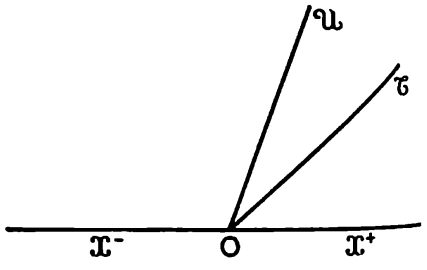


Fig. 8

Possiamo allora fissare un ordinamento totale per le semirette interne all'angolo piatto con la seguente definizione *.

* Enunciamo la relazione d'ordine in questa forma per ricalcare la relazione d'ordine introdotta sulla retta mediante l'assioma A4 (Cfr. § 13.3). Sarebbe stato indifferente assumere una relazione del tipo $\leq$ ed enunciare le proprietà (α), (β), (γ) e (δ) del § 19.5.

Si dice che la semiretta $\mathfrak{T}$ *precede la semiretta* $\mathfrak{U}$ (o *che* $\mathfrak{U}$ *segue* $\mathfrak{T}$) *e si scrive* $\mathfrak{T} < \mathfrak{U}$ *se* $\mathfrak{T}$ *è interna alla regione angolare* $(\mathfrak{X}^+, \mathfrak{U})$.

Ora siamo tenuti a verificare le seguenti proprietà, per le semirette interne al nostro angolo piatto (Cfr. § 10.2):

a) *Se è* $\mathfrak{T} < \mathfrak{U}$, *allora è* $\mathfrak{T} \neq \mathfrak{U}$.

b) *Se è* $\mathfrak{T} < \mathfrak{U}$ *e* $\mathfrak{U} < \mathfrak{V}$, *allora è* $\mathfrak{T} < \mathfrak{V}$ (*proprietà transitiva*).

c) *Se è* $\mathfrak{T} \neq \mathfrak{U}$, *allora è* $\mathfrak{T} < \mathfrak{U}$ *oppure* $\mathfrak{U} < \mathfrak{T}$.

Queste proprietà hanno una notevole evidenza intuitiva. Abbiamo già notato che le semirette del nostro angolo piatto uscenti da O sono in corrispondenza biunivoca con i punti di un semicerchio di raggio unitario con centro O contenuto nell'angolo, come si è visto nel § precedente; siamo portati ad affermare che l'ordine con cui si seguono le semirette $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, ... nell'angolo è quello stesso con cui si seguono le rispettive intersezioni sul nostro semicerchio (avendolo orientato opportunamente). Tuttavia, non abbiamo mai parlato, fino a questo punto, dell'ordinamento su un semicerchio; conviene allora proiettare ortogonalmente i punti $T, U, V, \ldots$ sulla retta $\mathfrak{X}$ ottenendo i punti $T_1, U_1, V_1, \ldots$ e confrontare questi punti secondo una delle due relazioni di ordine che abbiamo sulla retta $\mathfrak{X}$ (ricordare l'assioma A4).

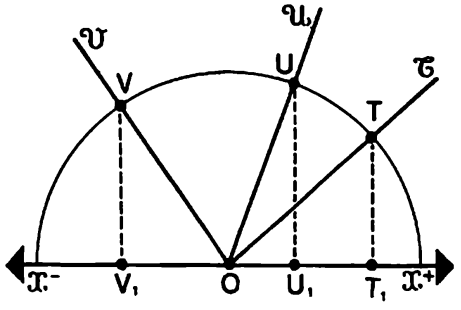


Fig. 9

Vale allora questo risultato:

I - *La relazione* $<$ *introdotta per le semirette* $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \ldots$ *dell'angolo equivale all'analoga relazione di ordine dei punti corrispondenti* T_1, U_1, V_1, *sulla*

retta $\mathfrak{x}$, *orientata nel verso di* $\mathfrak{x}^-$. *Di conseguenza valgono le proprietà a), b) e c).*

Ci troviamo di fronte, come già altre volte, al compito di dimostrare un'affermazione che è del tutto evidente. Il lettore non molto dotato di pazienza può prendere per buona la nostra affermazione e passare oltre.

Tuttavia, ci sentiamo di spezzare una lancia in difesa di queste dimostrazioni di cose ovvie, con i seguenti argomenti: in primo luogo è importante rendersi conto che ogni affermazione non inclusa negli assiomi può e deve essere dimostrata; in secondo luogo, anche nella dimostrazione di un fatto evidente ci può essere qualcosa di interessante. In terzo luogo può accadere (e accade continuamente, ad esempio, nei discorsi degli uomini politici) che certe affermazioni date per evidenti non lo siano affatto.

Veniamo dunque alla nostra dimostrazione.

Indichiamo con A e B i punti della retta $\mathfrak{x}$ di ascissa 1 e -1, rispettivamente. Le due relazioni di cui ci interessa dimostrare l'equivalenza sono le seguenti:

R: « *la semiretta* $\mathfrak{v}$ *è interna all'angolo* $(\mathfrak{x}^+, \mathfrak{u})$ ».

S: « *sulla retta* $\mathfrak{x}$, *orientata nel verso di* $\mathfrak{x}^-$, *si ha* $A < T_1 < U_1$ ».

Conviene porre la relazione S in una forma piú agevole per noi. È chiaro che tanto U_1 quanto T_1, essendo punti del segmento $[A, B]$ seguono A nel verso di $\mathfrak{x}^-$. La S può dunque essere espressa dicendo che T_1 è compreso fra U_1 ed A, oppure dicendo che i punti U_1 ed A si trovano in semipiani opposti rispetto alla retta TT_1; d'altra parte, i punti U ed U_1 sono entrambi nello stesso semipiano rispetto alla retta TT_1 perché la retta UU_1 è parallela alla retta TT_1. Possiamo dunque mettere la S nella forma:

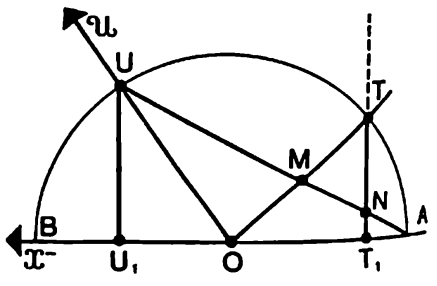


Fig. 10

S^*: « *il punto U ed il punto A si trovano da parti opposte rispetto alla retta* TT_1 ».

Ciò premesso, la dimostrazione, come in altri casi simili, si spezza in due parti:

a) *Se è vera la* R, *è vera la* S^*.

Congiungiamo A con U; il punto T sta dalla parte opposta di O rispetto alla retta AU; infatti, il punto T è, per ipotesi, interno all'angolo $(\mathfrak{x}^+, \mathfrak{u})$; se stesse dalla stessa parte di O rispetto alla retta AU sarebbe un punto del triangolo OAU. Ma il triangolo OAU è isoscele con vertice O e tutti i suoi punti, salvo A ed U, hanno distanza da O *minore* di $\overline{OA} = \overline{OU} = 1$, mentre è $\overline{OT} = 1$ e, d'altra parte, T, essendo interno all'angolo $(\mathfrak{x}^+, \mathfrak{u})$, è certamente diverso sia da A che da U. Dunque $[O, T]$ taglia la retta AU in un punto M: ciò è come dire che T ed O sono da parti opposte rispetto alla retta AU. Ma i punti O e T_1 sono dalla stessa parte rispetto alla retta AU perché il segmento $[O, T_1]$ non taglia la retta AU. Quindi T e T_1 sono da parti opposte rispetto alla retta AU. Il segmento $[T, T_1]$ taglia perciò la retta AU in un punto N che è ovviamente interno al cerchio e quindi appartiene alla corda $[A, U]$. Questo prova che i punti A ed U si trovano da parti opposte rispetto alla retta TT_1: ciò che, appunto, è l'enunciato della relazione S^*.

b) *Se* S^* *è vera, è vera* R.

Si tratta semplicemente di ripetere a ritroso tutti i passaggi fatti nella precedente dimostrazione. Se è vera S^*, cioè se A ed U si trovano da parti opposte rispetto alla retta TT_1, il segmento $[A, U]$ taglia $[T, T_1]$ in un punto N. Dunque T e T_1 si trovano da parti opposte rispetto alla retta AU; poiché O si trova dalla stessa parte di T_1

il segmento $[O, T]$ taglia $[A, U]$ in un punto M. Consideriamo ora la semiretta OT, cioè la $\mathfrak{t}$: essa congiunge il vertice O del triangolo AOU con il punto M del lato opposto. Essa è perciò interna all'angolo $\widehat{AOU}$, cioè all'angolo $(\mathfrak{x}^+, \mathfrak{u})$; pertanto la relazione R è vera ■

Cosí abbiamo concluso la dimostrazione del teorema I. Completiamo l'ordinamento introdotto nelle semirette dell'angolo piatto, fissando che per ogni semiretta $\mathfrak{t}$ interna all'angolo si abbia $\mathfrak{x}^+ < \mathfrak{t} < \mathfrak{x}^-$. Occorre fare attenzione a questo punto: *non abbiamo introdotto una relazione di ordine per tutte le semirette uscenti da O, ma soltanto per quelle di un angolo piatto.* Come si intuisce, è possibile definire in modo analogo una relazione d'ordine per le semirette dell'angolo piatto opposto, ma non è possibile saldare le due relazioni d'ordine in modo da ottenere un'unica relazione d'ordine valida per tutte le semirette uscenti da O.

Mediante la relazione di ordine stabilita per le semirette contenute nell'angolo piatto, possiamo anche confrontare fra loro gli angoli che hanno un lato coincidente con $\mathfrak{x}^+$.

Indichiamo sempre con $\mathfrak{y}^+$ la semiretta perpendicolare ad $\mathfrak{x}$ in O e interna al nostro angolo piatto. Un angolo $(\mathfrak{x}^+, \mathfrak{R})$ si dice *acuto* (come si è detto nel § 15.1) se la semiretta $\mathfrak{R}$ è contenuta nell'angolo retto $(\mathfrak{x}^+, \mathfrak{y}^+)$; allora la proiezione ortogonale di $\mathfrak{R}$ su $\mathfrak{x}$ coincide con $\mathfrak{x}^+$. Un angolo $(\mathfrak{x}^+, \mathfrak{R})$ si dice invece *ottuso* se la semiretta $\mathfrak{y}^+$ è interna all'angolo $(\mathfrak{x}^+, \mathfrak{R})$; in questo caso la proiezione ortogonale di $\mathfrak{R}$ su $\mathfrak{x}$ coincide con $\mathfrak{x}^-$.

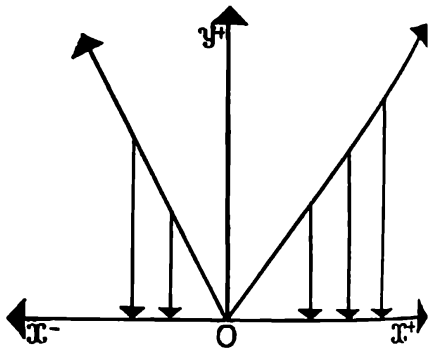


Fig. 11

Continuiamo a sviluppare l'analogia fra segmenti e angoli. Per i segmenti abbiamo introdotto una misura che è basata sulla distanza e che perciò si conserva quando il segmento viene sottoposto ad una trasformazione che conserva la distanza (cioè un'isometria). Occorre introdurre ora anche

per gli angoli una misura che si conservi nelle isometrie.

La misura degli angoli nel suo aspetto pratico ci è nota fin dalle scuole medie; nelle scienze sperimentali e nella tecnologia la rilevazione degli angoli è di grandissima importanza: c'è tutta una serie di strumenti, di tipo disparato, che servono a misurare gli angoli nelle varie situazioni: il sestante nell'astronomia e nella nautica, il teodolite nella topografia, goniometri di vario tipo nelle officine meccaniche, ecc.

Introdurremo ora la misura degli angoli mediante un assioma, il quale, prendendo atto di questi procedimenti empirici, afferma l'esistenza di un procedimento di misura per gli angoli. *L'assioma che ora esponiamo non è essenziale. Cioè: quello che esso afferma si può invece dimostrare in base agli assiomi precedenti;* la sua dimostrazione, tuttavia, richiederebbe un poco di fatica e ci farebbe perdere tempo. Per ora, registriamolo dunque come assioma (al decimo posto, dopo i nove assiomi geometrici elencati nei capitoli 13-14-15).

A10 (Assioma). *Esiste un'unica applicazione* (*detta* **misura angolare**) *che fa corrispondere ad ogni angolo del piano un numero reale non negativo con le seguenti proprietà:*

1) *La misura di un angolo* $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ *è* 0 *quando e solo quando è* $\mathcal{R} = \mathcal{S}$. *La misura di un qualsiasi angolo piatto è un numero* $\sharp$ *fissato.* Spesso, a motivo di una tradizione che risale agli astronomi babilonesi, si prende $\sharp = 180$; si dice allora che gli angoli sono misurati in **gradi sessagesimali**. Quando si opera all'interno della matematica conviene però, per ragioni che per ora non possiamo esporre, assumere $\sharp = \pi$ (lunghezza di un semicerchio di raggio 1). Si dice allora che gli angoli sono misurati in **radianti**.

2) *Se* $\mathcal{C}$ *è una semiretta interna all'angolo* $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$, *la misura dell'angolo* $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ *è uguale alla somma della*

misura dell'angolo $(\mathcal{R}, \mathcal{C})$ *e della misura dell'angolo* $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$. (Proprietà dell'**additività della misura**).

3) *Per ogni numero* α, *con* $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, *esiste un angolo che ha misura* α. (Proprietà di **surgettività della misura**).

4) *Se esiste un'isometria che trasforma l'angolo* $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ *nell'angolo* $(\mathcal{R}', \mathcal{S}')$, *i due angoli* $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ *ed* $(\mathcal{R}', \mathcal{S}')$ *hanno la stessa misura.* (Proprietà di **invarianza** *della* **misura rispetto alle isometrie**).

La misura di un angolo $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ verrà indicata con $\measuredangle (\mathcal{R}, \mathcal{S})$.

(Scriveremo anche $\measuredangle (A\hat{B}C)$ $\measuredangle \hat{A}$). Spesso, per facilitare la comprensione, useremo le lettere greche minuscole per indicare la misura degli angoli. Quando la misura è espressa in gradi sessagesimali, si aggiunge al numero che esprime la misura un cerchietto a mo' di apice: $180°, 60°, \ldots$

Noi useremo il termine **ampiezza** *come sinonimo di misura* (*per gli angoli*).

Ed ecco un importante teorema:

II - *Due angoli* $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ *ed* $(\mathcal{R}', \mathcal{S}')$ *hanno la stessa misura se e solo se esiste un'isometria che trasforma l'uno nell'altro* (*cioè se sono isometrici*).

Dimostrazione: il punto 4 dell'assioma A10 ci dice già che due angoli fra loro isometrici hanno la stessa misura. Resta perciò da dimostrare solo l'affermazione inversa, cioè che se due angoli hanno la stessa misura sono isometrici. Siano $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ e $(\mathcal{R}', \mathcal{S}')$ due angoli di uguale misura: ci proponiamo di costruire un'isometria che trasforma l'uno nell'altro. All'angolo $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ associamo il semipiano $\mathcal{E}$ che ha come bordo la retta di $\mathcal{R}$, e che

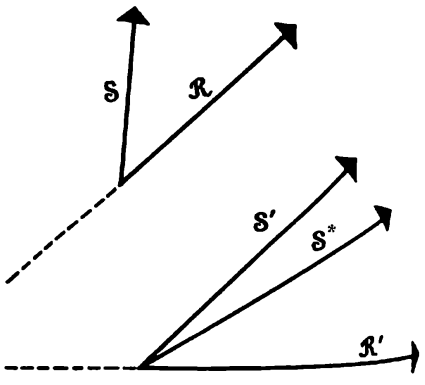


Fig. 12

contiene la semiretta $\mathcal{S}$. Nel caso che l'angolo $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ risulti piatto, cioè $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ siano fra loro opposte, indichiamo con $\mathcal{E}$ uno qualunque dei due semipiani. Analogamente procediamo per l'angolo $(\mathcal{R}', \mathcal{S}')$: indichiamo con $\mathcal{E}'$ il semipiano avente come bordo la retta di $\mathcal{R}'$ e contenente $\mathcal{S}'$ [o uno qualunque dei due semipiani se $(\mathcal{R}', \mathcal{S}')$ è piatto]; ora sappiamo che esiste un'isometria f che porta $\mathcal{R}$ a coincidere con $\mathcal{R}'$ e porta il semipiano $\mathcal{E}$ in $\mathcal{E}'$. Affermiamo che questa isometria porta $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}'$; per dimostrarlo, procediamo per assurdo. Indichiamo con $\mathcal{S}^*$ la semiretta trasformata di $\mathcal{S}$, e supponiamo che sia $\mathcal{S}^* \neq \mathcal{S}'$. Allora due casi sono possibili: o $\mathcal{S}^*$ è interna all'angolo $(\mathcal{R}', \mathcal{S}')$, oppure $\mathcal{S}'$ è interna all'angolo $(\mathcal{R}', \mathcal{S}^*)$.

Nel primo caso si ha

$$\measuredangle(\mathcal{R}', \mathcal{S}') = \measuredangle(\mathcal{R}', \mathcal{S}^*) + \measuredangle(\mathcal{S}^*, \mathcal{S}')$$

Ma risulta $\measuredangle(\mathcal{S}^*, \mathcal{S}') > 0$ (per il punto 1 dell'assioma A 10).

Dunque è

$$\measuredangle(\mathcal{R}', \mathcal{S}') > \measuredangle(\mathcal{R}', \mathcal{S}^*) = \measuredangle(\mathcal{R}, \mathcal{S})$$

[essendo isometrici gli angoli $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ ed $(\mathcal{R}', \mathcal{S}^*)$].

Ma questa relazione è contro l'ipotesi, avendo noi supposto che

$$\measuredangle(\mathcal{R}', \mathcal{S}') = \measuredangle(\mathcal{R}, \mathcal{S})$$

Analogamente si procede nell'altro caso ■

Dal teorema dimostrato risulta, in particolare, che *sono acuti gli angoli che hanno misura minore di* $\frac{\Phi}{2}$ *e*

ottusi gli angoli che hanno misura maggiore di $\frac{\pi}{2}$.

Concludiamo questo paragrafo con un importante teorema che riguarda il confronto degli angoli di un triangolo.

III - *In un triangolo* ABC *siano* α, β, γ *le misure degli angoli* $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ *e siano* a, b, c *le lunghezze dei lati opposti ad* A, B, C *(rispettivamente). Allora, se è* $a > b$, *si ha* $\alpha > \beta$.

Dimostrazione: sia $\mathcal{R}$ l'asse del segmento $[A, B]$. Il punto C, avendo per ipotesi distanza minore da A che da B, sta nello stesso semipiano di A rispetto ad $\mathcal{R}$ (vd. § 14.3). Pertanto il lato $[B, C]$ taglia la retta $\mathcal{R}$ in un punto M. Congiungiamo M con A: l'angolo $M\widehat{A}B$ è isometrico all'angolo $M\widehat{B}A$ perché gli corrisponde nella simmetria che ha per asse $\mathcal{R}$. D'altra parte, M è interno all'angolo $B\widehat{A}C$. Cosí si può concludere che la misura di $B\widehat{A}C$ è maggiore della misura di $C\widehat{B}A$, cioè $\alpha > \beta$ ■

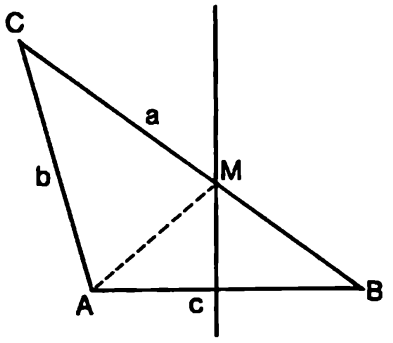


Fig. 13

Cerchiamo di completare i risultati forniti dal nostro teorema: dall'ipotesi $b > a$ si può dedurre, con analoga dimostrazione, $\beta > \alpha$. Se poi è $b = a$, allora il triangolo ABC risulta isoscele, avendo come asse di simmetria l'asse del segmento $[A, B]$ per cui si ha $\beta = \alpha$. Possiamo riassumere i risultati trovati, nella seguente tabella:

$$\begin{array}{lcl} a > b & \Rightarrow & \alpha > \beta \\ a = b & \Rightarrow & \alpha = \beta \\ a < b & \Rightarrow & \alpha < \beta \end{array} \qquad (3)$$

La prima riga si legge: « **se** $a > b$, **allora** $\alpha > \beta$», oppure « $a > b$ **implica** $\alpha > \beta$». In modo analogo si leggono le altre righe. Usiamo qui per la prima volta la freccia $\Rightarrow$, che è detta **connettivo di im-**

plicazione: è un segno che esprime un legame logico fra due proposizioni e serve a rendere piú chiaro e schematico il nostro discorso. Se indichiamo con A e B certe affermazioni, scrivendo $A \Rightarrow B$ intendiamo dire che ammettendo la verità di A (e supponendo, naturalmente, veri gli assiomi da cui siamo partiti) risulta certamente vera anche B.

Conveniamo che le scritture $A \Rightarrow B$ e $B \Leftarrow A$ abbiano lo stesso significato: l'importante è che la freccia sia diretta da A verso B.

Abbiamo visto nel § 10.3 (a proposito delle equazioni) che non sempre le deduzioni logiche sono reversibili, cioè non sempre la freccia si può invertire (ricordiamo un esempio: se x ed y sono numeri reali qualsiasi $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$ è vera, mentre $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ è falsa). Tuttavia, nel caso particolare di cui ci stiamo occupando (relazione fra lati ed angoli in un triangolo), tutte le implicazioni si possono invertire.

Ritorniamo infatti alla tabella (3). Osserviamo che le tre relazioni scritte a sinistra: $a > b$, $a = b$, $a < b$, comprendono tutti i casi possibili, e cosí pure le tre relazioni scritte a destra. Domandiamoci allora: che cosa può accadere se è $\alpha > \beta$? Non può essere $a = b$, perché allora sarebbe $\alpha = \beta$; non può essere $a < b$ perché allora sarebbe $\alpha < \beta$. Per esclusione, deve essere $a > b$. Quindi, *da tutta la tabella* (3) *possiamo dedurre* $\alpha > \beta \Rightarrow a > b$; in modo analogo si possono invertire le altre implicazioni, cioè si vede che: $\alpha = \beta \Rightarrow a = b$, $\alpha < \beta \Rightarrow a < b$. È una situazione interessante quella in cui due affermazioni A, B si implicano a vicenda; cioè si ha, nello stesso tempo, $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$ (o $A \Leftarrow B$); in altre parole, l'affermazione A e l'affermazione B o sono entrambe vere, o sono entrambe false.

Altre locuzioni che si impiegano in questa situazione sono: «B *è vera* **se e solo se** *è vera* A», oppure: «A *è* **condizione necessaria e sufficiente** *per* B». In questo caso si dice che A e B sono **logicamente equivalenti**; si può espri-

mere questo scrivendo: $A \iff B$. Il segno $\iff$ è detto connettivo di **doppia implicazione** o di **equivalenza logica.**

Possiamo dunque esprimere le relazioni fra i lati e gli angoli del triangolo con questi simboli:

$$\begin{array}{lll} a > b & \iff & \alpha > \beta \\ a = b & \iff & \alpha = \beta \\ a < b & \iff & \alpha < \beta \end{array} \qquad (4)$$

Esercizi

1 Date tre semirette con la stessa origine O è sempre vero che una di esse è interna all'angolo formato dalle altre due? (Trovare un controesempio).

2 Dimostrare che le bisettrici di due angoli adiacenti (cioè di due angoli con lo stesso vertice che hanno un lato in comune e gli altri due lati fra loro opposti) formano un angolo retto.

3 È dato un cerchio di centro O e raggio r. Quale è l'insieme dei punti esterni al cerchio da cui questo è visto sotto un angolo acuto?

* **4** In un triangolo ABC si ha $\overline{AB} > \overline{AC}$; che cosa si può dire degli angoli che la mediana mandata da A fa con i lati $[A, B]$ e $[A, C]$?

5 Da un punto P esterno ad un cerchio si mandano le due semirette tangenti $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$. Dimostrare che tutti i punti del cerchio, tranne i punti di tangenza, sono interni all'angolo $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$.

6 Un punto P si muove su un cerchio di centro O e raggio r; A è un punto fisso tale che $\overline{AO} > r$. Per quali posizioni di P l'angolo $\widehat{PAO}$ ha ampiezza massima?

* **7** Nel piano sia $\boldsymbol{v}$ un vettore fissato, di intensità 1; si prende un secondo vettore $\boldsymbol{w}$ di intensità 1 e con direzione a caso. Quale è la probabilità che $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ abbia intensità maggiore di 1? (Dicendo che la direzione è presa a caso, si intende dire: la probabilità che la direzione cada in un certo angolo è proporzionale all'ampiezza dell'angolo).

20.4 La misura degli angoli ci conduce facilmente alla scoperta di risultati che sono tra i piú profondi della geometria euclidea. Premettiamo che, dato un poligono convesso di n lati A_1, A_2, A_3, ..., A_n, si dice angolo **interno** l'angolo for-

Proprietà angolari dei poligoni

mato da due lati consecutivi, cioè un angolo $A_{k-1}\widehat{A_k}A_{k+1}$.

(Ed anche gli angoli $A_{n-1}\widehat{A_n}A_1$, $A_n\widehat{A_1}A_2$, dal momento che A_n ed A_1 devono essere considerati fra loro consecutivi).

Si dice invece angolo **esterno** l'angolo formato da un lato e dal prolungamento del lato consecutivo.

È chiaro che, per ciascun vertice A_k, vi sono due angoli esterni: quello formato dal prolungamento del lato $[A_{k-1}, A_k]$ e dal lato $[A_k, A_{k+1}]$, e quello formato dal lato $[A_{k-1}, A_k]$ e dal prolungamento del lato $[A_k, A_{k+1}]$; questi due angoli sono fra loro opposti rispetto al vertice A_k, cioè si corrispondono in una simmetria di centro A_k e perciò hanno la stessa ampiezza. Per associare ad ogni vertice un ben determinato angolo esterno, possiamo, come in figura, scegliere un verso di percorrenza del poligono (ad esempio, quello indicato dalla successione dei vertici con cui è assegnato: $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, A_1$) e, per ogni vertice, prendere l'angolo formato dal prolungamento del lato che lo precede e dal lato che lo segue.

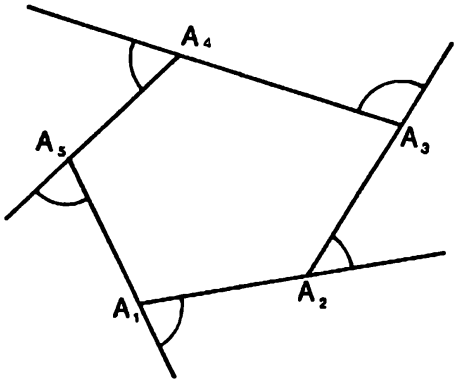


Fig. 14

I - *La somma delle misure degli angoli interni di un triangolo è* $\pm$ (*misura dell'angolo piatto*).

Indichiamo con α, β, γ le misure degli angoli $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$. Sia M il punto di mezzo del lato $[A, C]$ ed N il punto di mezzo del lato $[B, C]$. La simmetria con centro in M manda il punto B

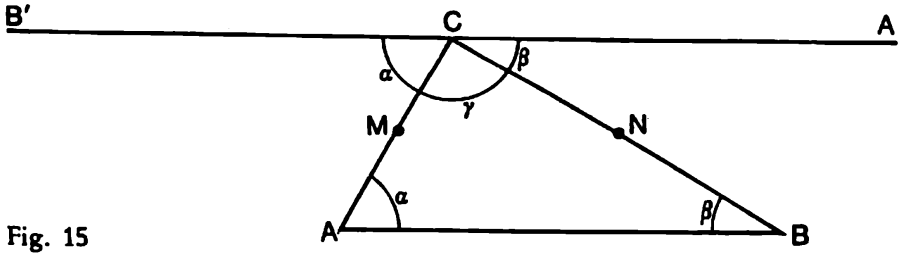


Fig. 15

in un punto B' e trasforma l'angolo $\widehat{A}$ nell'angolo $A\widehat{C}B'$ che ha misura α. Analogamente, la simmetria di centro N manda il punto A in un punto A' e trasforma l'angolo $\widehat{B}$ nell'angolo $B\widehat{C}A'$, che ha misura β. Ora i punti A' e B' si trovano sulla parallela alla retta AB mandata per C, *che è unica*; inoltre B' ed A' si trovano da parti opposte rispetto al punto C perché, rispetto alla retta AC, B e B' sono da parti opposte, mentre B ed A' sono dalla stessa parte. Dunque l'angolo $A'C'B'$ è piatto: si conclude che è $\alpha + \beta + \gamma = \sphericalangle$ ■

II - *La somma delle misure degli angoli interni di un poligono convesso di n lati è* $(n - 2)\sphericalangle$; *la somma delle misure degli angoli esterni è* $2\sphericalangle$, *indipendentemente dal numero dei lati.*

L'ultima affermazione è quella che ha maggiore evidenza intuitiva: se percorriamo il poligono in uno stesso senso, ad ogni vertice dobbiamo «sterzare» di un angolo, che è appunto l'angolo esterno; ritornati al punto di partenza avremo complessivamente sterzato di un giro intero, cioè di $2\sphericalangle$. (Il numero $2\sphericalangle$ è detto «misura dell'angolo giro», ma è una locuzione impropria perché l'angolo giro... non è un angolo, almeno nel senso preciso che abbiamo assunto noi). Veniamo alla dimostrazione del teorema.

Sia $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ un poligono convesso di n lati. Congiungiamo un vertice (ad es. A_1) con ciascuno degli altri vertici *non consecutivi*: A_3, ..., A_{n-1}. Ogni segmento $[A_1, A_k]$ così ottenuto è interno al poligono; le semirette A_1A_k sono tutte interne all'angolo $\widehat{A_1}$ e le semirette A_kA_1 sono tutte interne all'angolo $\widehat{A_k}$. È allora evidente che il poligono è stato scomposto in $n - 2$ triangoli (tanti quanti sono i lati del poligono non adiacenti al vertice A_1). È anche evidente che ogni angolo interno del poligono o è un angolo interno di uno dei triangoli della

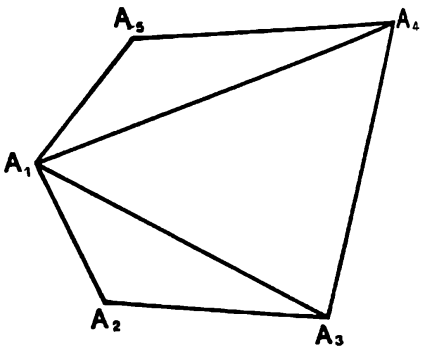


Fig. 16

scomposizione, o si spezza in piú angoli che sono angoli interni di un triangolo. Si conclude che la somma delle misure degli angoli interni del poligono è uguale alla somma complessiva delle misure degli angoli dei triangoli, che, per il teorema I, è data da $(n-2)\,\dot{+}$.

Per dimostrare la seconda affermazione, osserviamo che la somma delle misure di un angolo interno e di un angolo esterno relativi ad uno stesso vertice è $\dot{+}$; perciò la somma delle misure degli angoli interni e degli angoli esterni del poligono è, complessivamente, $n\dot{+}$; se ne deduce che la somma delle misure degli angoli esterni è $n\dot{+} - (n-2)\,\dot{+} = 2\,\dot{+}$ ■

Nell'introduzione della geometria (§ 13.1) abbiamo visto che si possono considerare oltre al nostro piano, altri spazi, che possono avere alcune proprietà comuni con esso, altre nettamente diverse. Fra gli esempi accennati allora c'è quello di una superficie sferica in cui le « rette » (cioè le linee di piú breve cammino) sono gli archi di un cerchio massimo; pensiamo ad esempio alla superficie della Terra. Si possono misurare facilmente gli angoli di due cerchi massimi che si incontrano in un punto; insomma, si può parlare della misura degli angoli come abbiamo fatto nel § precedente. Tuttavia, quando si misurano gli angoli interni di un « triangolo » si hanno delle sorprese; prendiamo ad esempio un triangolo terrestre che ha per vertici il Polo nord N e due punti A, B situati sull'equatore. (Il riferimento alla superficie della Terra facilita la nostra descrizione); i lati sono due archi di meridiano che congiungono N con A e con B, e un arco di equatore che congiunge A con B. Gli angoli in A e in B sono evidentemente retti; indichiamo con δ la misura dell'angolo in N; allora la somma delle misure degli angoli interni del triangolo è $\dot{+} + \delta$, quindi è superiore a quella del triangolo della geometria euclidea, che è $\dot{+}$, e inoltre non è costante, ma dipende dal triangolo che si considera (infatti il numero δ può variare).

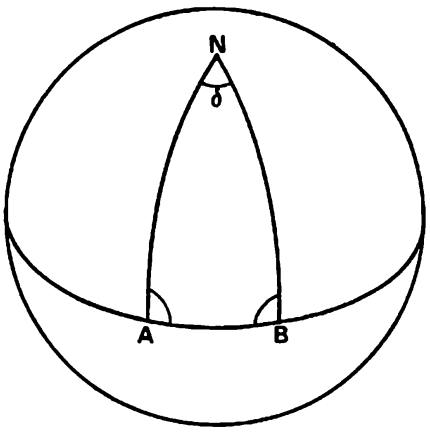


Fig. 17

Vediamo ora un esempio interessante di applicazione del teorema II. Dobbiamo prima richiamare — in una forma che forse ci è nuova — la nozione di poligono regolare.

Si dice **regolare** *un poligono convesso* $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ *tale che esista una rotazione che manda* A_1 *in* A_2, A_2 *in* $A_3 \ldots A_{n-1}$ *in* A_n *ed* A_n *in* A_1. *Il centro di questa rotazione si chiama* **centro** *del poligono.*

Dei poligoni regolari conosciamo e sappiamo costruire con riga e compasso: il triangolo equilatero, il quadrato, l'esagono. Vedremo nel prossimo capitolo che è possibile costruire con riga e compasso anche il pentagono e il decagono. È del tutto intuitivo il fatto che esistano poligoni regolari con un numero n arbitrario di lati; piú avanti ritorneremo su questo argomento.

III - *Un poligono regolare ha i lati di uguale lunghezza, gli angoli interni di uguale ampiezza, è inscritto in un cerchio e ha i lati equidistanti dal centro di questo.*

La rotazione di cui parla la definizione porta il lato $[A_1, A_2]$ sul lato $[A_2, A_3]$, il lato $[A_2, A_3]$ sul lato $[A_3, A_4]$, ecc.; dunque si ha $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \ldots = \overline{A_nA_1}$. Essa porta l'angolo $A_1\widehat{A_2}A_3$ sull'angolo $A_2\widehat{A_3}A_4$, l'angolo $A_2\widehat{A_3}A_4$ sull'angolo $A_3\widehat{A_4}A_5$, ecc.; pertanto, tutti questi angoli hanno uguale ampiezza. Sia O il centro di rotazione; poiché il segmento $[O, A_1]$ viene portato sul segmento $[O, A_2]$, questo sul segmento $[O, A_3]$, ecc., tutti questi segmenti hanno un'uguale lunghezza r. Dunque i vertici A_1, A_2, ..., A_n stanno tutti sul cerchio con centro in O e raggio r. È anche evidente che l'asse di ciascun segmento $[A_1, A_2]$, $[A_2, A_3]$, ... passa per il punto O e che la distanza di ciascuno di questi segmenti da O è la medesima ■

Il raggio r del cerchio in cui è inscritto un poligono regolare si dice **raggio** del poligono; la distanza di un lato dal centro del cerchio si dice **apotema** del poligono.

Ci poniamo ora questo problema: è possibile ricoprire il piano con poligoni regolari, tutti isometrici fra loro? Dobbiamo precisare un po' le nostre richieste: noi ammettiamo che due poligoni adiacenti possano avere in comune o solo un vertice, oppure un intero lato, con i vertici che sono estremi di quel lato, ovviamente; in particolare, non ammettiamo che due poligoni adiacenti possano avere in comune soltanto una parte di un lato. Per individuare le possibili piastrellature (chiamiamole così...) saranno importanti due numeri interi:

n numero dei lati dei poligoni regolari impiegati;

m numero dei poligoni che hanno un vertice in comune.

Evidentemente la somma delle misure degli angoli che hanno uno stesso vertice deve essere 2π l'ampiezza di ciascun angolo è data da $\dfrac{(n-2)\,\pi}{n}$; infatti gli n angoli di ciascun poligono hanno uguale ampiezza e la somma delle ampiezze è $(n-2)\,\pi$. Ricaviamo allora la relazione:

$$\frac{(n-2)\,\pi}{n}\,m = 2\,\pi$$

Questa si può scrivere $(n-2)\;m = 2n$ o anche

$$nm - 2m - 2n = 0 \qquad (5)$$

Abbiamo già visto, in problemi analoghi a questo, che conviene cercare di fattorizzare (o, perlomeno, di fattorizzare a meno di una costante) l'espressione a primo membro. Nel nostro caso, si ha

$$nm - 2m - 2n = (n - 2)(m - 2) - 4$$

tenendo conto di questa identità, si può mettere la (5) nella forma

$$(n - 2)\ (m - 2) = 4$$

Questa ci dice che tanto $n - 2$ quanto $m - 2$ devono essere presi fra i divisori di 4; questi sono $1, 2, 4$. Abbiamo allora le tre seguenti soluzioni:

$n - 2 = 1\ ,\ m - 2 = 4$ cioè $n = 3\ ,\ m = 6$
$n - 2 = 2\ ,\ m - 2 = 2$ cioè $n = 4\ ,\ m = 4$
$n - 2 = 4\ ,\ m - 2 = 1$ cioè $n = 6\ ,\ m = 3$

La prima soluzione rappresenta una piastrellatura a *triangoli equilateri*: sono sei le piastrelle che hanno in comune un vertice.

La seconda soluzione rappresenta una piastrellatura a *quadrati*: vi sono quattro piastrelle per ogni vertice.

La terza soluzione rappresenta una piastrellatura fatta di *esagoni regolari*: in ogni vertice se ne incontrano tre.

Noi abbiamo semplicemente dimostrato che questi tre tipi sono i soli possibili: ma il disegno ci mostra che queste piastrellature si possono effettivamente realizzare.

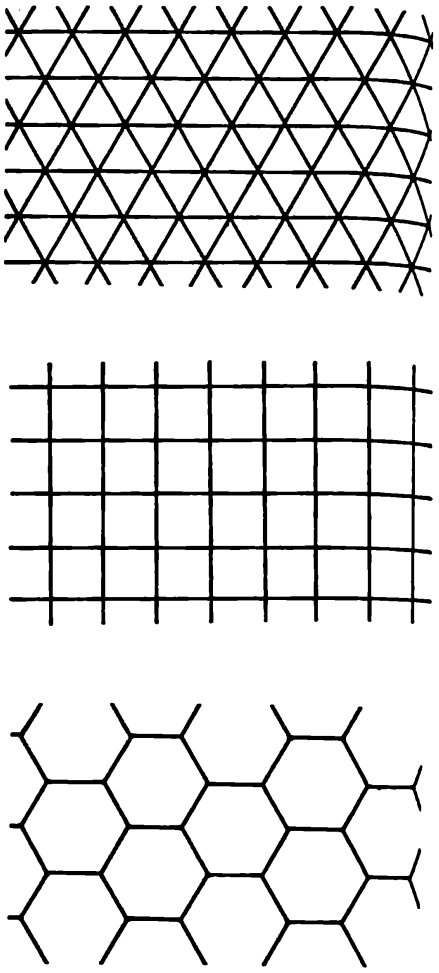


Fig. 18

Esercizi

1 Dimostrare le seguenti affermazioni: *a*) se in un triangolo un angolo è ottuso o retto, gli altri due sono acuti; *b*) in ogni triangolo isoscele i due angoli alla base sono acuti.

2 Dimostrare che un poligono convesso non può avere piú di tre angoli acuti.

3 In un triangolo isoscele un angolo ha ampiezza doppia di un altro; quale può essere l'ampiezza degli angoli?

* **4** Fare vedere che, supponendo dati un poligono regolare di m lati ed un poligono regolare di n lati, con m ed n primi fra loro, è possibile costruire, con operazioni del tutto elementari, un poligono di mn lati. Che cosa si può dire se m ed n non sono primi fra loro?

* **5** Sopra ciascuno dei lati di un esagono regolare si costruisca un quadrato. Si dimostri che i vertici esterni individuano un dodecagono regolare.

20.5 Siano A e B due punti di un cerchio Γ; scegliamo uno dei due semipiani generati dalla retta AB; i punti del cerchio che appartengono a questo semipiano costituiscono un **arco** di estremi A e B, che indicheremo con Γ_1. Indichiamo con Γ_2 l'arco formato dai punti di Γ che appartengono all'altro semipiano. Se C è un punto di Γ_1, diremo che l'angolo $A\hat{C}B$ è **inscritto** in Γ_1.

Proprietà angolari del cerchio

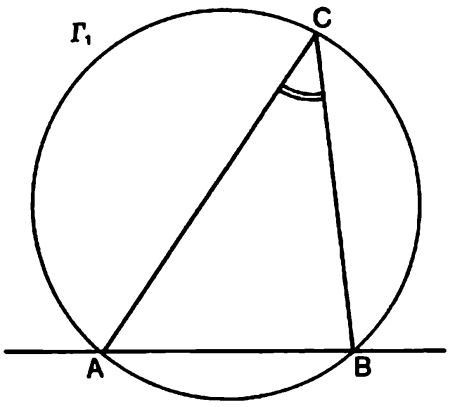


Fig. 19

I - *Tutti gli angoli inscritti in uno stesso arco hanno uguale ampiezza.*

Questo teorema sarà conseguenza di varie considerazioni che ora esporremo.

Partiamo da una semplice osservazione: data una corda $[A, B]$ del cerchio Γ, la simmetria assiale che scambia fra loro A e B, cioè la simmetria rispetto all'asse della corda $[A, B]$, trasforma il cerchio in sé. Basta riflettere che il centro O del cerchio si trova sull'asse della simmetria e quindi è un punto fisso della simmetria: ogni punto, nella simmetria, mantiene inalterata la sua distanza da O e quindi i punti di Γ si trasformano in punti di Γ; notiamo che anche gli archi Γ_1 , Γ_2 vengono trasformati in sé e che la tangente in A (che è perpendicolare in A alla retta OA) viene trasformata nella tangente in B (che è la perpendicolare ad OB in B). Altra osservazione importante: gli angoli che la corda AB forma con le semirette tangenti in A e B, rispettivamente, da una stessa parte rispetto alla retta AB, sono simmetrici e quindi hanno uguali ampiezze.

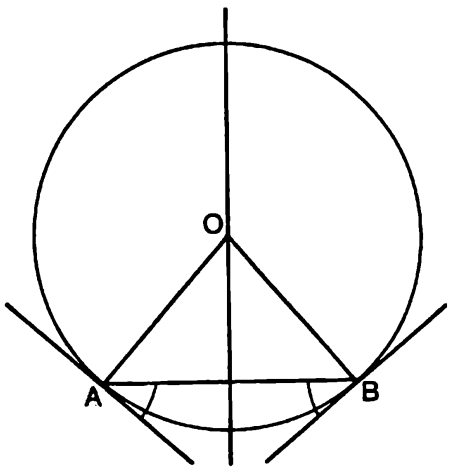


Fig. 20

Potremo chiamare *associati* i due angoli di questo tipo.

Ora consideriamo un triangolo ABC inscritto in un cerchio Γ; indichiamo con α, β, γ le ampiezze dei relativi angoli. Consideriamo in B e C gli angoli associati dalla parte *opposta* a quella di A; indichiamo con δ la loro ampiezza comune.

Analogamente, indichiamo con ε l'ampiezza comune dei due angoli associati in A e in C, dalla parte opposta di B, con φ l'ampiezza comune dei due angoli associati in A e in B, dalla parte opposta di C.

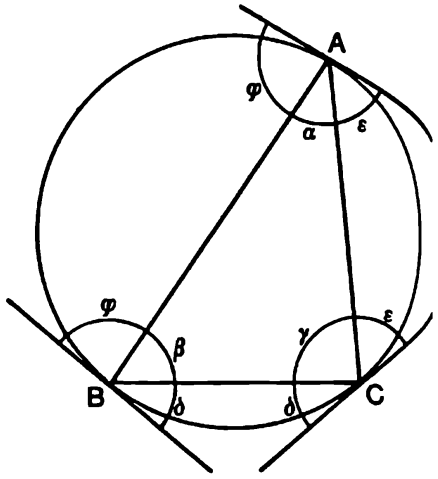


Fig. 21

Abbiamo ora queste quattro relazioni:

$\alpha + \beta + \gamma = \sphericalangle$ perché α, β, γ sono le ampiezze degli angoli interni del triangolo ABC;

$\alpha + \varepsilon + \varphi = \sphericalangle$ perché i tre angoli in A formano un angolo piatto;

$\beta + \varphi + \delta = \sphericalangle$ perché i tre angoli in B formano un angolo piatto;

$\gamma + \delta + \varepsilon = \sphericalangle$ perché i tre angoli in C formano un angolo piatto.

Sommiamo membro a membro queste tre ultime relazioni:

$$\alpha + \beta + \gamma + 2(\delta + \varepsilon + \varphi) = 3\sphericalangle$$

tenendo conto della prima, si ha

$$\sphericalangle + 2(\delta + \varepsilon + \varphi) = 3\sphericalangle$$

cioè

$$2(\delta + \varepsilon + \varphi) = 2\sphericalangle$$

da cui

$$\delta + \varepsilon + \varphi = \sphericalangle$$

Da questa uguaglianza e dalla seconda delle quattro scritte sopra si ha

$$\alpha + \varepsilon + \varphi = \delta + \varepsilon + \varphi$$

e, semplificando,

$$\alpha = \delta$$

Analogamente si può ottenere $\beta = \varepsilon$, $\gamma = \varphi$. Interpretiamo ora le relazioni trovate; teniamo fissi B e C, e supponiamo che A vari mantenendosi sempre nel medesimo arco di estremi B e C. Evidentemente la tangente in B non varia, l'ampiezza δ non varia; la relazione $\alpha = \delta$ ci dice che l'ampiezza dell'angolo $B\hat{A}C$, inscritto nell'arco, si mantiene costante.

Risulta cosí dimostrato il teorema I, con un'ulteriore informazione riguardante l'ampiezza dell'angolo ■

La dimostrazione ci suggerisce anche come costruire, assegnati due punti A, B e scelto uno dei due semipiani generati dalla retta AB, un arco di cerchio di estremi A e B i cui punti « vedono » il segmento $[A, B]$ sotto un angolo di ampiezza δ assegnata. (Questo arco viene anche detto arco « capace » dell'ampiezza δ): presa, con origine in A, una semiretta s che si trovi nel semipiano opposto a quello prescelto e che formi con la semiretta AB un angolo di ampiezza δ, si traccia la perpendicolare ad s in A, fino ad incontrare l'asse del segmento $[A, B]$; il punto di incontro O è il centro del cerchio richiesto.

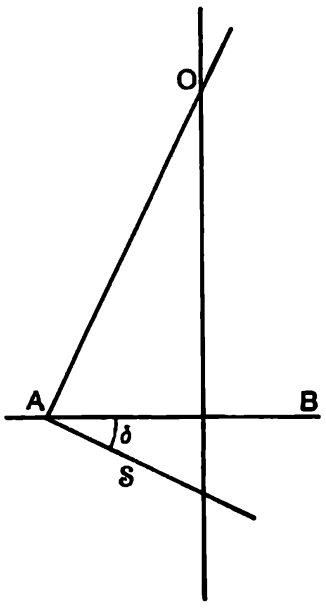


Fig. 22

Viene allora spontaneo chiedersi: nel semipiano fissato, oltre ai punti dell'arco tracciato, vi possono essere altri punti da cui il segmento $[A, B]$ è visto sotto un angolo di ampiezza δ? La risposta è negativa, come dice il seguente enunciato che lasciamo al lettore da dimostrare, per esercizio:

II - *Sia* Γ_1 *un arco del cerchio* Γ, *di estremi* A, B, *capace di un'ampiezza* δ; *sia* ε_1 *il semipiano avente per bordo la retta* AB *e contenente l'arco* Γ_1.
I punti di ε_1 *interni a* Γ *vedono la corda* $[A, B]$ *sotto un angolo maggiore di* δ, *quelli esterni vedono la corda* $[A, B]$ *sotto un angolo minore di* δ*.

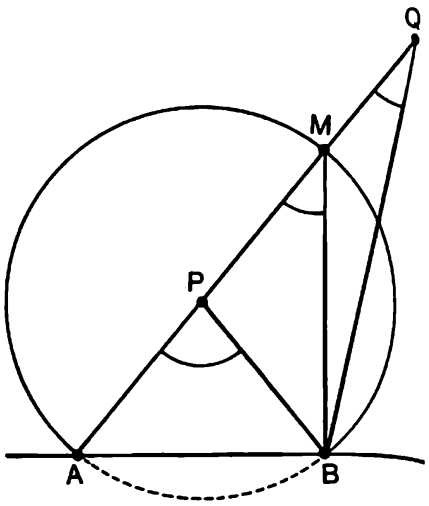


Fig. 23

Dato il solito cerchio Γ e i suoi punti A, B, domandiamoci in che relazione stanno fra loro gli angoli iscritti nei due archi Γ_1, Γ_2 che sono contenuti in semipiani opposti rispetto alla retta AB.

Consideriamo la tangente a Γ nel punto A; le sue due semirette con origine in A formano con la semiretta AB due angoli δ_1 δ_2 tali che $\delta_1 + \delta_2 = \sphericalangle$; concludiamo che *le ampiezze di un qualsiasi angolo inscritto in* Γ_1, *e di un qualsiasi angolo inscritto in* Γ_2, *hanno per somma* $\sphericalangle$; *ossia (come si dice usualmente) i due angoli sono fra loro supplementari.*

III - *Un quadrilatero convesso* $ABCD$ *è inscrivibile in un cerchio se e soltanto se i suoi angoli opposti sono supplementari.*

Infatti, supponiamo che il quadrilatero convesso $ABCD$ sia inscritto in un cerchio Γ; la diagonale $[A, C]$ lascia i vertici B e D da parti opposte, per la convessità del quadrilatero. I vertici B e D appartengono perciò a ciascuno dei due diversi archi di estremi A e C.

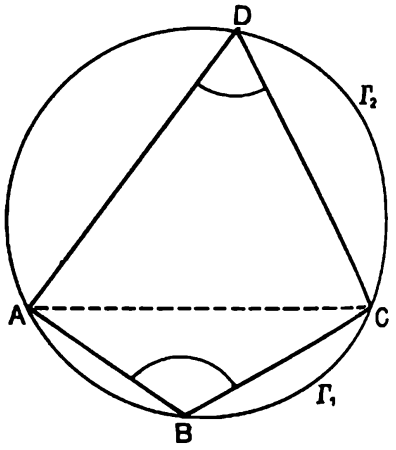


Fig. 24

Per quello che abbiamo dimostrato gli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$ sono supplementari.

Viceversa, supponiamo che gli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$ siano supplementari. I vertici B e D appartengono a due archi Γ_1, Γ_2 di estremi A e B, in semipiani opposti (sempre per la convessità del quadrilatero)

* Dovremmo dire « di ampiezza maggiore (o risp. minore) di δ »; ma nel linguaggio corrente, per evitare un'eccessiva pesantezza, ci permettiamo qualche abbreviazione come questa.

e capaci di angoli δ_1 , δ_2, tali che $\delta_1 + \delta_2 = \sharp$. Quest'ultima condizione implica che gli archi Γ_1 e Γ_2 abbiano nel punto A la stessa tangente; essi hanno entrambi il centro sull'asse del segmento $[A , C]$: allora Γ_1 e Γ_2 sono archi di uno stesso cerchio Γ. Dunque il quadrilatero $ABCD$ risulta inscritto in Γ■

Esercizi

1 Costruire un triangolo ABC dati: $\overline{BC}$, l'ampiezza dell'angolo $\widehat{A}$ e l'altezza h_A mandata dal vertice A al lato opposto.

2 Un punto P percorre una retta parallela ad un segmento $[A , B]$. In quale posizione è massimo l'angolo sotto cui da P si vede il segmento $[A , B]$?

* **3** Da una nave sono visibili e riconoscibili tre fari; è anche possibile misurare gli angoli fra i raggi di luce che provengono da essi. Determinare la posizione della nave sulla carta.

* **4** Da una nave, che si muove lungo una rotta rettilinea, sono visibili e riconoscibili due fari A , B. L'angolo secondo cui sono visti i due fari cresce, fino a raggiungere un massimo in un punto, che indichiamo con P; in P vengono anche misurati gli angoli che le direzioni dei fari formano con la direzione della nave. Segnare il punto P sulla carta.

* **5** Indicare l'insieme dei punti del piano da cui un quadrato è visto sotto un angolo assegnato. (Distinguere vari casi, secondo l'ampiezza dell'angolo).

* **6** Nel piano sono assegnati due punti: A , O. Fra tutti i segmenti che hanno come punto di mezzo O e hanno lunghezza fissata $2r$ (con $r < \overline{AO}$) determinare quello che è visto da A sotto l'angolo massimo.

I classici criteri di congruenza nei triangoli

20.6 Il triangolo è la figura fondamentale della geometria euclidea; molte delle dimostrazioni classiche sono ottenute scomponendo una figura in triangoli e mettendo questi triangoli in relazione fra loro.

Lo strumento tecnico di questo procedimento è tradizionalmente costituito dai **criteri di congruenza** dei triangoli.

Il termine «criterio» significa «condizione sufficiente»: qui si tratta di trovare condizioni sufficienti perché due triangoli: ABC e $A'B'C'$, siano fra loro congruenti, cioè esista una isometria (o congruenza, come anche la chiamiamo) che porti A in A', B in B', C in C'. Nel nostro caso particolare, le condizioni che esporremo sono anche necessarie, cioè sono certamente soddisfatte se i due triangoli sono congruenti.

I - *Due triangoli* ABC e $A'B'C'$ *siano tali che*

$$\measuredangle(B\widehat{A}C) = \measuredangle(B'\widehat{A'}C') \ , \ \overline{AB} = \overline{A'B'} , \ \overline{AC} = \overline{A'C'}$$

Allora essi sono congruenti.

Dimostrazione. Poiché i due angoli $B\widehat{A}C$, $B'\widehat{A'}C'$ hanno uguale ampiezza, esiste un'isometria che porta il primo angolo nel secondo. Possiamo supporre, inoltre, che questa isometria porti la semiretta AB nella semiretta $A'B'$ e la semiretta AC nella semiretta $A'C'$. Poiché $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ questa isometria porta il punto B nel punto B'; analogamente, essendo $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, l'isometria porta il punto C nel punto C'. Così abbiamo trovato un'isometria che porta i vertici A, B, C, ordinatamente, nei vertici A', B', C', ed è quello che dovevamo dimostrare ■

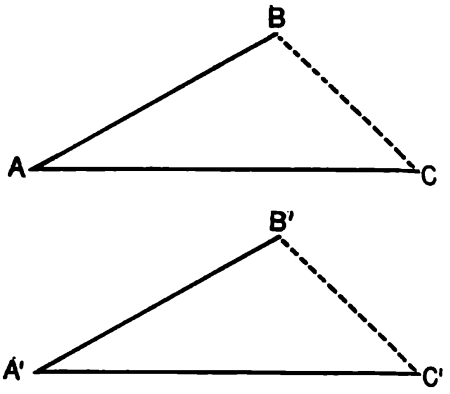


Fig. 25

Occorre fare attenzione: il nostro criterio non richiede l'uguaglianza delle misure di due lati e di un angolo qualsiasi; l'angolo deve essere quello compreso fra i due lati. *Se l'angolo fosse opposto ad uno dei due lati i due triangoli non sarebbero necessariamente congruenti.* Invitiamo il lettore a convincersene costruendo effettivamente un triangolo di cui siano assegnate le misure di due lati e di un angolo *opposto* ad uno di essi. In relazione ai dati, si presenteranno diversi casi, che sarà opportuno classificare con cura.

II - *Due triangoli* ABC, $A'B'C'$ *siano tali che*

$\overline{AB} = \overline{A'B'}$

$\measuredangle (\widehat{ABC}) = \measuredangle (\widehat{A'B'C'})$

$\measuredangle (\widehat{BAC}) = \measuredangle (\widehat{B'A'C'})$

Allora i due triangoli sono congruenti.

La dimostrazione di questo teorema non è affatto complicata, ma presenta la difficoltà — tipica di certi punti della geometria — che si trova quando si vuole dimostrare un'affermazione del tutto evidente...

Dimostrazione. Essendo $\measuredangle (\widehat{ABC}) = \measuredangle (\widehat{A'B'C'})$, esiste un'isometria σ che porta la semiretta AB nella semiretta $A'B'$ e la semiretta AC nella semiretta $A'C'$; naturalmente, essendo $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, essa porta il punto B nel punto B'. Analogamente, essendo $\measuredangle (\widehat{BAC}) = \measuredangle (\widehat{B'A'C'})$, esiste un'isometria τ che porta la semiretta BA nella semiretta $B'A'$ e la semiretta BC nella semiretta $B'C'$; essendo $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, anche τ porta il punto A nel punto A' (e, naturalmente, il punto B nel punto B'). Osserviamo che il semipiano avente per bordo la retta AB e contenente il punto C viene mandato sia dalla σ che dalla τ nel semipiano generato da $A'B'$ contenente il punto C'. Ma sappiamo, dal teorema I del § 20.1 che è *unica* l'isometria che porta A in A', B in B' e un semipiano fissato in un semipiano fissato. Dunque le due isometrie coincidono: $\sigma = \tau$. Questa unica isometria porta la semiretta AC nella semiretta $A'C'$, la semiretta BC nella semiretta $B'C'$; allora il punto C, intersezione di AC con BC, viene trasformato nel punto C', intersezione di $A'C'$, con $B'C'$. In definitiva, abbiamo trovato un'isometria che porta A in A', B in B' e C in C' ■

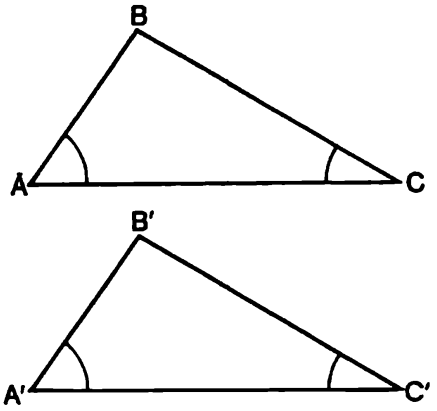


Fig. 26

III - *Due triangoli ABC, $A'B'C'$ tali che $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ sono congruenti.*

Dimostrazione. Esiste un'isometria (unica) che porta A in A', B in B' e porta il semipiano (generato da AB) contenente C nel semipiano (generato da $A'B'$) contenente C'. Il punto C va a finire in un punto C^* tale che $\overline{AC} = \overline{A'C^*}$, $\overline{BC} = \overline{B'C^*}$.

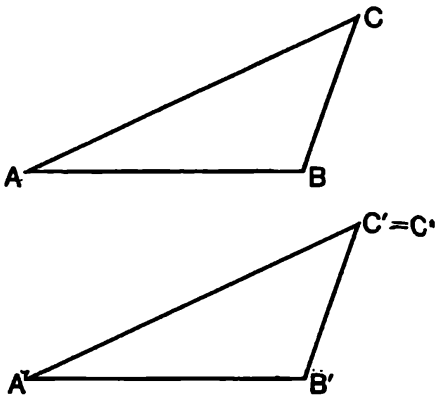


Fig. 27

Il punto C^* deve trovarsi nello stesso semipiano in cui si trova C', rispetto alla retta $A'B'$, inoltre è $\overline{AC^*} = \overline{AC'}$, $\overline{BC^*} = \overline{BC'}$. Ma è certamente $C^* = C'$: infatti se fosse $C^* \neq C'$, i punti A, B dovrebbero trovarsi entrambi sull'asse del segmento $[C', C^*]$, quindi si troverebbero da parti opposte rispetto alla retta AB ■

Ora cerchiamo di cogliere il significato che hanno questi criteri di congruenza per lo studio dei triangoli. In un triangolo ABC, indicheremo sempre con α, β, γ le ampiezze degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ e con a, b, c le lunghezze dei lati opposti ad A, B, C (rispettivamente). Disponiamo dunque dei sei numeri α, β, γ, a, b, c, che non variano quando il triangolo viene trasformato mediante un'isometria. I nostri criteri di congruenza hanno una formulazione analoga fra loro: ci dicono che, assegnati tre opportuni elementi, fra questi sei, il triangolo risulta individuato (naturalmente, a meno di un'isometria) e quindi risultano individuati gli altri tre elementi. I dati richiesti dai criteri sono i seguenti:

(α, b, c) (I criterio)

(α, β, c) (II criterio)

(a, b, c) (III criterio)

Nella nostra discussione, abbiamo esaminato tutti i modi possibili in cui tre dati possono essere presi fra i sei? (A questa e ad altre analoghe domande invitiamo a dare risposta per esercizio).

I criteri di congruenza possono essere considerati come teoremi di unicità: le ipotesi che essi pre-

sentano non individuano però un unico triangolo, ma una classe di triangoli fra loro isometrici.

(Si dimostri che, nell'insieme dei triangoli, la relazione di congruenza è una relazione di equivalenza, cioè gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva).

Ma esistono effettivamente dei triangoli con i dati: (α, b, c), oppure (α, β, c), oppure (a, b, c)? Per l'ultimo caso, la risposta è già stata data nel § 18.4; per gli altri due casi invitiamo il lettore a dare la risposta, cercando se per l'esistenza del triangolo i dati devono soddisfare ad opportune condizioni. (Ad esempio, sappiamo che per il terzo caso devono essere soddisfatte le disuguaglianze $a \leqslant b + c$ e le altre analoghe).

Comunque, resta il problema di vedere quali legami vi sono fra i tre elementi assegnati e i tre incogniti. In certi casi un disegno accurato ci permette di rilevare misure di angoli o di lati in modo abbastanza preciso: tuttavia è chiaro che questo non può essere un procedimento soddisfacente dal punto di vista matematico: occorre stabilire relazioni precise tra ampiezze di angoli e lunghezze di segmenti. Questo compito spetta alla trigonometria, che è un capitolo classico della geometria.

Vocaboli e simboli

rotazione, **centro** di una rotazione
angolo; **regione angolare**
misura angolare (**ampiezza**)
gradi sessagesimali: 180°, 45°, ...
radianti
angolo **interno**, angolo **esterno** (di un poligono)
poligono **regolare**, **centro**, **raggio**, **apotema**
arco, angolo **inscritto** in un arco
esistenza; **unicità**
connettivo di **implicazione**: $\Rightarrow$
se ... **allora** ...

doppia implicazione (equivalenza logica): $\Leftrightarrow$
« ... se e solo se ... »
condizione **necessaria e sufficiente**
criterio

Esercizi

1 Due quadrangoli convessi: $ABCD$, $A'B'C'D'$ sono tali che $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\overline{CD} = \overline{C'D'}$, $\overline{DA} = \overline{D'A'}$, $\measuredangle(\widehat{A}) = \measuredangle(\widehat{A'})$. Dimostrare che sono congruenti. L'ipotesi della convessità è essenziale?

2 Due quadrangoli convessi: $ABCD$, $A'B'C'D'$ sono tali che $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\overline{CD} = \overline{C'D'}$, $\measuredangle(\widehat{B}) = \measuredangle(\widehat{B'})$, $\measuredangle(\widehat{C}) = \measuredangle(\widehat{C'})$. Dimostrare che sono congruenti.

3 Di un quadrangolo convesso $ABCD$ si conoscono: $\overline{AB}$, $\measuredangle(C\widehat{B}A)$, $\measuredangle(B\widehat{A}C)$, $\measuredangle(B\widehat{A}D)$, $\measuredangle(B\widehat{C}D)$. È determinato? (A meno di isometrie, naturalmente).

** **4** Dimostrare che un poligono convesso avente tutti i lati di uguale lunghezza e tutti gli angoli interni di uguale ampiezza è regolare.

21

Le similitudini

21.1 Un disegno, una fotografia possono essere ingranditi o impiccioliti. In questo processo gli oggetti rappresentati conservano la stessa forma, tanto che siamo abituati a dire che si tratta dello *stesso* oggetto, anche se rappresentato in diverse dimensioni. Che cosa viene conservato di una figura quando la sottoponiamo ad un ingrandimento o ad una riduzione? Riflettendo un poco, ci accorgiamo che in questa trasformazione *vengono conservate le proporzioni di ogni parte dell'oggetto rappresentato, anche se cambiano le misure:* e questo perché le distanze fra due punti qualsiasi vengono tutte modificate secondo un rapporto *costante* che viene detto scala.

Similitudini e omotetie

Siamo allora portati ad introdurre questa definizione:

Si dice **similitudine** *un'applicazione bigettiva del piano in sé tale che, detti* P, Q *due punti qualsiasi e* P', Q' *i loro corrispondenti, risulta*

$$\overline{P'Q'} = l\,\overline{PQ} \qquad (1)$$

dove l *è una costante positiva che viene detta* **rapporto di similitudine** *o* **scala.**

Una similitudine per cui è $l = 1$ è un'isometria, quindi *le isometrie si possono vedere come particolari similitudini.* Per comodità di linguaggio, chiameremo *proprie* le similitudini per cui è $l \neq 1$.

Come primo esercizio, lasciamo al lettore il compito di dimostrare in modo perfettamente chiaro le seguenti affermazioni.

I - *La composizione di due similitudini è una similitudine (di rapporto...).*

L'inversa di una similitudine è una similitudine (di rapporto...).

Nell'introdurre le similitudini siamo partiti da dati della nostra esperienza quotidiana. Ma, volendo restare nella nostra geometria, siamo in grado — sulla base degli assiomi che abbiamo introdotto — di dimostrare l'esistenza di una similitudine di rapporto l fissato? La risposta è affermativa; il nostro discorso, tuttavia, dovrà essere un po' lungo e dovrà cominciare con l'introduzione di una classe particolare di trasformazioni del piano: le omotetie. Ed ecco la nuova definizione:

Dato un punto O del piano ed un numero positivo l, si dice **omotetia** *di centro O e di rapporto l l'applicazione così definita:*

Ad O corrisponde O.

Ad un punto $P \neq O$ corrisponde un punto P' sulla semiretta OP, tale che

$$\overline{OP'} = l\overline{OP} \qquad (2)$$

Insomma, un'omotetia di centro O è una dilatazione (o una contrazione) del piano «a raggiera» a partire dal punto O, che rimane fermo.

Si vede subito che un'omotetia è un'applicazione bigettiva (scrivere la dimostrazione con cura!).

È anche evidente dalla definizione che la nostra omotetia modifica secondo il rapporto l le distanze dei punti dal centro. Ci proponiamo ora di dimostrare che *ogni* distanza viene modificata

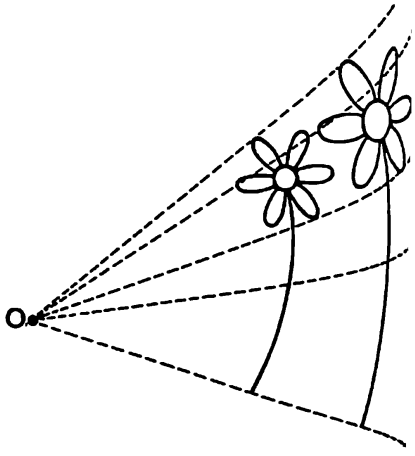


Fig. 1

secondo il rapporto l: cioè la nostra omotetia è una similitudine di rapporto l. A questo scopo ci sarà molto utile il riferimento cartesiano.

Siano dunque $\mathfrak{X}$ ed $\mathfrak{Y}$ assi cartesiani con origine in O e sia $P \leftrightarrow (x, y)$ un punto qualsiasi, P_1 la sua proiezione sull'asse $\mathfrak{X}$; sia $P' \leftrightarrow (x', y')$ il corrispondente di P nell'omotetia e P'_1 la proiezione di P' su $\mathfrak{X}$. Per la nostra definizione risulta $\overline{OP'} = l\overline{OP}$. D'altra parte, per l'assioma A9, a motivo del fatto che P e P' sono allineati con O, si ha $\overline{OP_1} = k\,\overline{OP}$, $\overline{OP'_1} = k\,\overline{OP'}$ dove k è il rapporto di proiezione della retta OP. Perciò

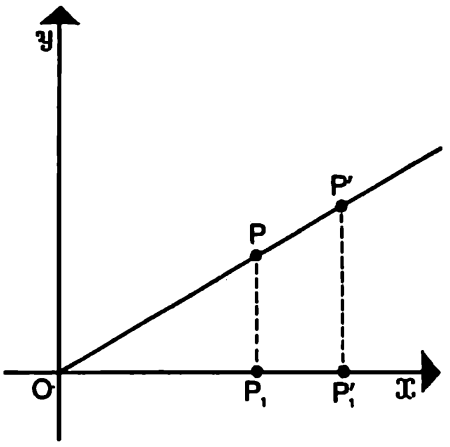


Fig. 2

$$\overline{OP'_1} = k\,\overline{OP'} = kl\overline{OP} = l\overline{OP_1} \qquad (3)$$

Notiamo ora che, se P non sta sull'asse $\mathfrak{Y}$, P_1 e P'_1 appartengono entrambi al semiasse $\mathfrak{X}^+$, o entrambi al semiasse $\mathfrak{X}^-$. Quindi sono possibili questi due casi:

$$\overline{OP_1} = x \ , \ \overline{OP'_1} = x'$$

oppure

$$\overline{OP_1} = -x \ , \ \overline{OP'_1} = -x'$$

In entrambi i casi, dalla (3) si ricava $x' = lx$; questa relazione vale evidentemente anche quando P e P' stanno sull'asse $\mathfrak{Y}$ essendo allora $x = x' = 0$. Analogamente, possiamo proiettare P e P' sull'asse $\mathfrak{Y}$ ottenendo la relazione $y' = ly$.

Possiamo concludere:

II - *Un'omotetia con centro O e rapporto l si rappresenta, rispetto ad un qualunque riferimento cartesiano con origine in O, con il sistema*

$$\begin{cases} x' = lx \\ y' = ly \end{cases} \qquad (4)$$

È veramente interessante il fatto che la *scrittura di questo sistema non dipenda dal modo con cui si prendono gli assi* (purché, naturalmente, l'origine sia O). Ed ecco il risultato preannunciato:

III - *Un'omotetia di rapporto l è una similitudine di rapporto l.*

Dobbiamo verificare che l'omotetia modifica le distanze fra due punti qualsiasi secondo il rapporto fisso l. Siano $P \leftrightarrow (x_1 , y_1)$, $Q \leftrightarrow \leftrightarrow (x_2 , y_2)$ due punti qualsiasi, e siano $P' \leftrightarrow \leftrightarrow (x'_1 , y'_1)$, $Q' \leftrightarrow (x'_2 , y'_2)$ i punti corrispondenti. Si ha: $x'_1 = lx_1$, $y'_1 = ly_1$, $x'_2 = lx_2$, $y'_2 = ly_2$. Per la consueta formula della distanza (ved. § 15.3) risulta

$$\overline{P'Q'} = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} =$$

$$= \sqrt{l^2 (x_2 - x_1)^2 + l^2 (y_2 - y_1)^2} =$$

$$= \sqrt{l^2 [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]} =$$

$$= l \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = l \overline{PQ}$$

(Qui abbiamo tenuto conto del fatto che l è un numero positivo) ■

IV - *Un'omotetia trasforma ogni retta in una retta ad essa parallela, e trasforma in sé ogni retta passante per il centro.*

L'equazione di una retta $\mathcal{R}$ è $ax + by = c$; sostituiamo in questa i valori di x ed y dati dalle (4): $x = \frac{x'}{l}$, $y = \frac{y'}{l}$. Otteniamo la seguente relazione esprimente il legame che deve sussistere fra le coordinate (x' , y') del punto P' corrispondente al punto $P \leftrightarrow (x , y)$:

$$a\frac{x'}{l} + b\frac{y'}{l} = c$$

da cui, moltiplicando membro a membro per l, si ottiene

$$ax' + by' = lc$$

Questa, come sappiamo, è l'equazione di una retta $\mathcal{R}'$ parallela alla retta $\mathcal{R}$ assegnata.

Se poi la retta $\mathcal{R}$ passa per O, si ha $c = 0$ e perciò $lc = 0$. È evidente allora che la retta $\mathcal{R}'$ coincide con $\mathcal{R}$ ■

A questo punto può essere utile ricordare che abbiamo già trovato delle trasformazioni interessanti che cambiano le rette in rette parallele: le traslazioni. Fissiamo allora due punti Q, Q' corrispondenti nella nostra omotetia e consideriamo anche la *traslazione* che porta Q in Q'.

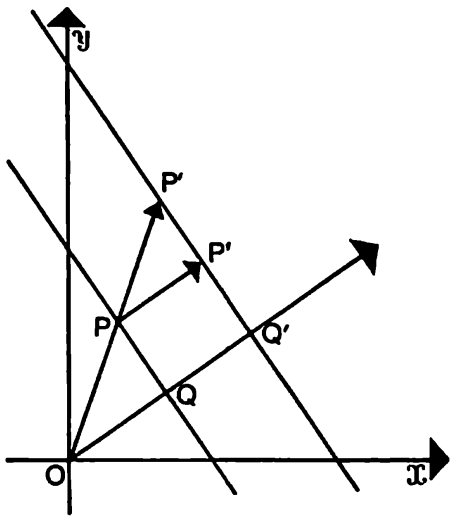


Fig. 3

Poiché la parallela ad una retta mandata per un punto è unica, è chiaro che l'omotetia e la traslazione operano alla stessa maniera sulle rette passanti per Q. Naturalmente, occorre fare bene attenzione: non si vuol dire che l'omotetia e la traslazione si comportino alla stessa maniera punto per punto, ma soltanto che *esse mandano un punto P di una retta $\mathcal{R}$ per Q in due punti P', P* (in generale distinti) appartenenti alla stessa retta $\mathcal{R}'$ (passante per Q' e parallela ad $\mathcal{R}$).*

Ma a noi interessa poter dire qualcosa di piú:

V - *Un'omotetia ed una traslazione che mandano il punto Q nello stesso punto Q' trasformano ogni semiretta con origine in Q nella stessa semiretta con origine in Q'.*

Poiché il riferimento cartesiano può essere preso come fa comodo, possiamo prendere l'asse $\mathfrak{X}$ in modo che contenga i punti Q e Q'; sarà $Q \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (\bar{x}, 0)$, $Q' \leftrightarrow (l\bar{x}, 0)$.

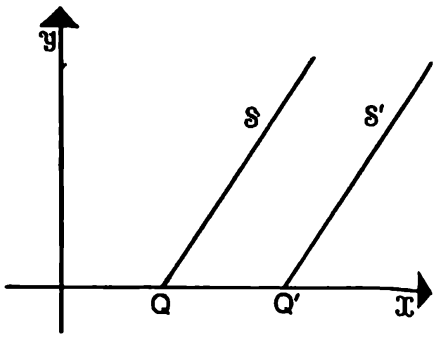


Fig. 4

L'equazione dell'omotetia è sempre

$$\begin{cases} x' = lx \\ y' = ly \end{cases}$$

Mentre l'equazione della traslazione sarà

$$\begin{cases} x' = x + h \\ y' = y \end{cases}$$

essendo $h = l\bar{x} - \bar{x}$.

Allora è evidente che entrambe le trasformazioni trasformano il semipiano $y > 0$ in sé (per l'omotetia, occorre tener presente che è $l > 0$). Se s è una semiretta che si trova nel semipiano $y > 0$, allora evidentemente, tanto l'omotetia che la traslazione la trasformano nella semiretta s', parallela e situata nel semipiano $y > 0$. Analogo discorso vale per le semirette contenute nel semipiano $y < 0$. Resta da considerare il caso di una semiretta con origine in Q e contenuta in $\mathfrak{X}$; consideriamo, ad esempio, la semiretta $x > \bar{x}$; l'omotetia, tenendo presente che è $x = \frac{x'}{l}$, la trasforma nella semiretta $\frac{x'}{l} > \bar{x}$, cioè $x' > l\bar{x}$. La traslazione la trasforma nella semiretta $x' - h > \bar{x}$, cioè $x' > h + \bar{x} = l\bar{x} - \bar{x} + \bar{x} = l\bar{x}$.

Dunque, si tratta sempre della medesima semiretta. Così la dimostrazione è conclusa ■

Da questo risultato si può trarre una conseguenza molto importante. L'omotetia e la traslazione

trasformano allo stesso modo le semirette con origine in Q, e *quindi anche gli angoli* (che non sono altro che coppie di semirette con uguale origine). Ma una traslazione è un'isometria e quindi (per l'assioma A10) conserva l'ampiezza degli angoli. Possiamo concludere:

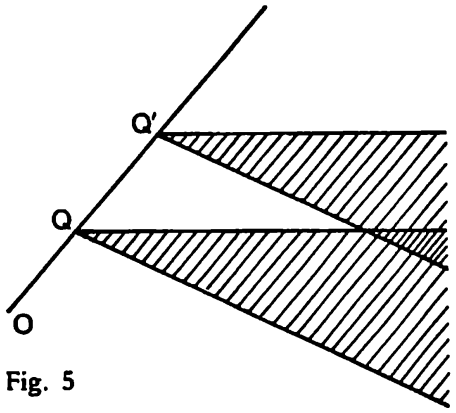


Fig. 5

VI - *Un'omotetia conserva l'ampiezza degli angoli.*

Esercizi

1 Dimostrare che una similitudine trasforma rette in rette e cerchi in cerchi. (Imitare la dimostrazione svolta nel § 14.1 per le isometrie).

2 La relazione (1) (sempre con $l > 0$) dice già che una similitudine è un'applicazione iniettiva: dimostrarlo.

3 Due rette ortogonali vengono trasformate da una similitudine in rette ortogonali: dimostrarlo.

4 Due cerchi di raggi disuguali sono sempre omotetici: dimostrarlo.

5 Dato un triangolo, la retta che congiunge i punti di mezzo di due lati è parallela al terzo. (Si tratta dell'esercizio 2 del § 16.5: ora siamo in grado di darne una dimostrazione piú rapida).

** **6** Dato un triangolo ABC, con gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ acuti, costruire un quadrato con due vertici sul lato $[A, B]$ e gli altri due sui lati $[A, C]$ e $[B, C]$, rispettivamente.

* **7** Dato un angolo ed un punto P in esso, costruire un cerchio passante per P e tangente ai due lati dell'angolo.

* **8** Data una parabola mediante il fuoco e la direttrice, costruire le sue intersezioni con una retta assegnata.

9 Dato un riferimento cartesiano, rappresentare un'omotetia con rapporto l e con centro in un punto $Q \leftrightarrow (x_0, y_0)$.

** **10** Costruire le tangenti comuni di due cerchi assegnati.

21.2 Lo studio delle omotetie, che abbiamo condotto in modo esauriente nel § precedente,

Triangoli simili e fattorizzazione delle similitudini

ci fornisce la chiave per analizzare rapidamente le similitudini. Il punto fondamentale su cui fa leva il nostro discorso è la facile constatazione che, *componendo (non importa in quale ordine) un'omotetia di rapporto l con un'isometria si ottiene una similitudine di rapporto l.* (Fare la verifica formale!).

Cominceremo occupandoci di alcuni problemi particolari che riguardano il triangolo.

Premettiamo una convenzione abbastanza ovvia: diciamo che due figure sono simili se esiste una similitudine che trasforma l'una nell'altra.

I - (Primo criterio di similitudine dei triangoli). *Due triangoli* ABC , $A'B'C'$ *tali che si abbia*

$$\measuredangle(A) \quad \measuredangle(A') \quad , \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$$

sono simili.

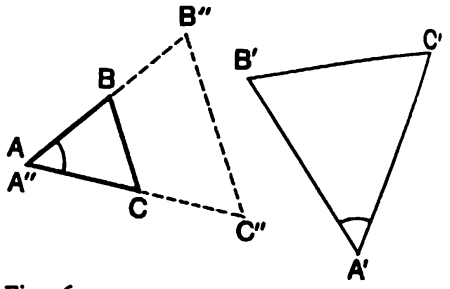


Fig. 6

La nostra ipotesi ci suggerisce spontaneamente di introdurre un'omotetia h di rapporto $l = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$ con centro in un punto qualsiasi. (Nella figura il centro è stato preso coincidente con A). Il triangolo ABC viene trasformato in un triangolo $A''B''C''$ tale che $\overline{A''B''} = l\,\overline{AB}$, $\overline{A''C''} = l\,\overline{AC}$. $\measuredangle(\widehat{A''}) = \measuredangle(\widehat{A})$. Ma allora è $\overline{A''B''} = \overline{A'B'}$, $\overline{A''C''} = \overline{A'C'}$, $\measuredangle(\widehat{A''}) = \measuredangle(\widehat{A'})$, perciò il triangolo $A''B''C''$ è congruente al triangolo $A'B'C'$, per il primo criterio di congruenza dei triangoli (§ 20.6).

Quindi esiste un'isometria g che trasforma il triangolo $A''B''C''$ nel triangolo $A'B'C'$ (ordinatamente). L'applicazione $g \circ h$ (prodotto di un'omo-

tetia per una isometria) è una similitudine che trasforma il triangolo ABC nel triangolo $A'B'C'$ ■

Valgono anche i seguenti teoremi:

II - (Secondo criterio di similitudine dei triangoli). *Due triangoli* ABC , $A'B'C'$ *tali che*

$$\measuredangle(\widehat{A}) = \measuredangle(\widehat{A'}) \ , \ \measuredangle(\widehat{B}) = \measuredangle(\widehat{B'})$$

sono simili.

III - (Terzo criterio di similitudine dei triangoli). *Due triangoli* ABC , $A'B'C'$ *tali che*

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$$

sono simili.

Lasciamo al lettore per esercizio il compito di svolgere la dimostrazione, ricalcando quella del teorema I: si tratta sempre di costruire un'omotetia che trasformi il triangolo ABC in un triangolo $A''B''C''$ congruente al triangolo $A'B'C'$.

In tutti questi casi siamo riusciti ad ottenere la similitudine che occorreva come prodotto di una omotetia per un'isometria. Questo ci porta a pensare che sia possibile rappresentare *ogni* similitudine mediante la composizione di un'omotetia ed una isometria.

IV - *Una qualunque similitudine* s *si può rappresentare così:*

$$s = t \circ h \qquad (5)$$

dove h è un'omotetia e t è un'isometria.

L'idea della dimostrazione è la medesima di prima. Sia assegnata la similitudine s di rapporto l; sia h una qualunque omotetia con lo stesso rapporto l. Posto, per un qualunque punto P, $s(P) = P'$, $h(P) = P''$, è intuitivamente chiaro che risulta definita come nei casi precedenti, un'*isometria t* che manda P'' in P'. Vogliamo descrivere t in modo preciso? Per andare da P'' in P' possiamo ritornare da P'' a P e poi andare da P a P' (vedere lo schema della figura accanto). In altre parole, possiamo porre

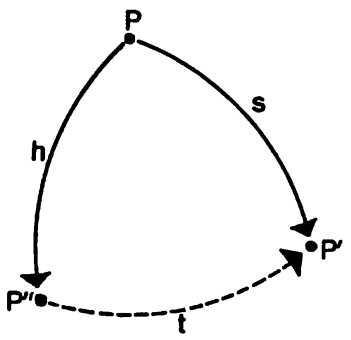


Fig. 7

$$t = s \circ g$$

dove abbiamo indicato con g l'applicazione inversa di h. È evidente che g è un'omotetia (lo abbiamo già notato) e che ha un rapporto uguale a $\frac{1}{l}$; dunque t è una similitudine di rapporto 1, cioè un'isometria. Infine si ha

$$t \circ h = s \circ g \circ h = s$$

e così è effettivamente verificata la (5) ■

Lasciamo al lettore, per esercizio, di rendersi conto che una similitudine può essere scomposta in una isometria e in una omotetia anche in ordine inverso a quello della (5) (cioè eseguendo prima un'isometria e poi un'omotetia).

Dopo il teorema IV, le similitudini non hanno piú misteri. Possiamo, ad esempio formulare questo enunciato, che è del tutto evidente:

V - *Una similitudine trasforma rette in rette, semipiani in semipiani, cerchi in cerchi, e conserva la misura degli angoli.*

Facciamo ancora un'osservazione importante relativa alle aree. Durante questo corso non abbiamo ritenuto opportuno rifare da capo la teoria delle aree, ritenendo sufficiente per ora quanto abbiamo appreso nella scuola media, o nelle scuole elementari. Ad esempio, abbiamo già applicato la formula che fornisce l'area di un triangolo ABC: $\frac{1}{2} b h$, dove b è la base ed h è l'altezza, cioè $b = \overline{AC}$, $h = \overline{BH}$, essendo H il piede della perpendicolare mandata da B alla retta AC. Trasformiamo il triangolo ABC in un triangolo $A'B'C'$ mediante una similitudine di rapporto l. Il punto H si trasforma in un punto H' della retta $A'C'$ e il segmento $[B', H']$ risulta ortogonale alla retta $A'B'$ perché l'ortogonalità si conserva nella similitudine; dunque $\overline{B'H'}$ è l'altezza del nuovo triangolo. L'area di questo è allora data da

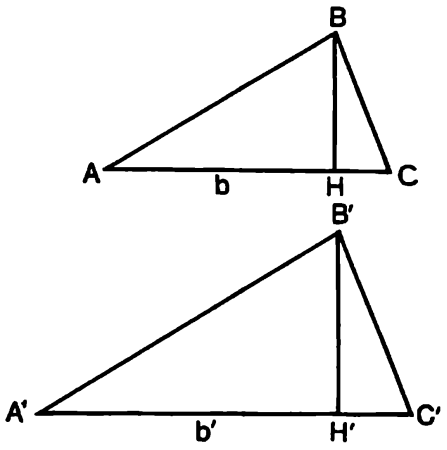


Fig. 8

$$\frac{1}{2} \overline{A'C'} \cdot \overline{B'H'} = \frac{1}{2} (l\,\overline{AC})(l\,\overline{BH}) =$$
$$= l^2 \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BH}$$

Possiamo concludere:

VI - *Il rapporto delle aree di due triangoli simili è uguale al quadrato del loro rapporto di similitudine.*

Poiché un poligono si può scomporre in triangoli, si dimostra facilmente che le aree di due poligoni simili hanno fra loro un rapporto uguale al quadrato del rapporto di similitudine.

Concludiamo questo paragrafo con un'applicazione interessante della similitudine ad un particolare triangolo.

Consideriamo dunque un triangolo isoscele ABC

che ha l'angolo al vertice $\widehat{A}$ di $\frac{\pi}{5}$ (in gradi sessagesimali : 36°).

Prendiamo un punto D sul lato $[A, C]$ tale che BD bisechi l'angolo $\widehat{B}$. L'angolo $D\widehat{B}C$ ha una misura (in gradi) di $\frac{1}{4}(180\text{-}36) = 36$. Pertanto, gli angoli $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$, hanno, ordinatamente, la stessa ampiezza degli angoli $D\widehat{B}C$, $B\widehat{D}C$, $\widehat{C}$; i due triangoli $A\,B\,C$, $B\,D\,C$ sono (in questo ordine) simili (per il criterio II) e si ha

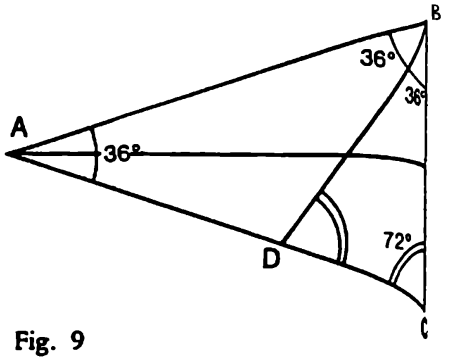


Fig. 9

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \qquad (6)$$

Sia $\overline{AB} = r$, $\overline{BC} = x$; notiamo che il triangolo ABD è isoscele con vertice in D; perciò $\overline{AD} = \overline{BD} = x$. La relazione (6) si scrive allora

$$\frac{x}{r-x} = \frac{r}{x}$$

cioè

$$x^2 + rx - r^2 = 0$$

Questa equazione ci è già nota: la sua soluzione positiva ci dà la *parte aurea* di r, e noi sappiamo già costruirla con riga e compasso. (Cfr. § 18.7). Poiché abbiamo preso l'angolo $\widehat{A}$ con ampiezza uguale alla quinta parte dell'angolo piatto, possiamo concludere con questa affermazione interessante.

VII - *È possibile costruire con riga e compasso un decagono regolare inscritto in un cerchio assegnato.* (Ed è quindi possibile costruire anche un pentagono regolare).

Esercizi

1 Dato un cerchio ed un punto O non appartenente ad esso, si mandino due secanti al cerchio. Siano M, N i due punti di intersezione della prima secante, P, Q quelli della seconda. Dimostrare che i triangoli ONP ed OQM sono simili fra loro.

2 Due quadrati sono sempre simili fra loro.

3 Tutte le parabole sono simili fra loro. (Si può fare una dimostrazione analitica, oppure sintetica).

4 Applicando la formula di Erone dare una nuova dimostrazione del teorema VI.

5 Dimostrare che, in un triangolo rettangolo, l'altezza relativa all'ipotenusa divide il triangolo in due triangoli simili al triangolo dato.

6 Costruire un triangolo, dati due angoli e il perimetro.

7 Inscrivere in un cerchio un rettangolo simile ad un rettangolo dato.

8 Dimostrare la (6) partendo nel modo seguente: ruotare il triangolo BCD in modo opportuno attorno a D ...; oppure: ribaltarlo attorno ad una retta opportuna per D ...

9 Eseguire effettivamente la costruzione del decagono regolare.

Le unità di misura e le similitudini

21.3 Nella nostra esposizione della geometria siamo giunti ormai ad un punto conclusivo, da cui è opportuno gettare uno sguardo alla via percorsa. In questo paragrafo rifletteremo sul primo passo che abbiamo compiuto: l'introduzione della distanza. Anzitutto, dobbiamo sottolineare ancora il fatto che, nell'introdurre la distanza, non abbiamo adottato un particolare procedimento di misura e non abbiamo parlato di unità di misura. Giunti a questo punto, ci è chiaro che, per lo sviluppo interno della geometria, il modo con cui può essere introdotta la distanza non interessa: interessa solo che la distanza — con tutti gli altri enti e le altre operazioni introdotte — soddisfi agli assiomi posti. Naturalmente, il significato della distanza e la specificazione dell'unità di misura diventano invece essenziali nell'applicazione della geometria alla realtà esterna; effettivamente, negli esercizi e

nei problemi abbiamo parlato continuamente di distanze misurate in metri, o in centimetri, ecc. *

Riprendiamo ora questo discorso, domandiamoci che cosa succede se, nella nostra geometria cambiamo la scala delle distanze. Supponiamo dunque che tutte le distanze, fra le varie coppie di numeri, vengano moltiplicate per uno stesso numero $l > 0$: questo è appunto quello che succede nella realtà fisica quando si cambia unità di misura, prendendone una nuova, l volte piú piccola.

Indichiamo con $\overline{\overline{PQ}}$ la nuova distanza, cioè poniamo

$$\overline{\overline{PQ}} = l\,\overline{PQ} \qquad (7)$$

Con questo cambiamento di distanza, abbiamo una nuova geometria; tuttavia la nostra intuizione ci dice che, nella sostanza, le cose stanno come prima. Effettivamente, siamo in grado di dimostrare questa prima importante affermazione:

I - *Se la distanza* $\overline{PQ}$ *viene sostituita con la distanza* $\overline{\overline{PQ}}$ *espressa dalla* (7), *tutti gli assiomi della geometria continuano ad essere validi.*

Per rendercene conto, occorre verificare che rimangono veri gli assiomi in cui interviene la distanza. Cominciamo con l'assioma $A1$. È evidente che è $\overline{\overline{PQ}} > 0$ se i punti P, Q sono distinti e $\overline{\overline{PQ}} = 0$ se i punti P e Q coincidono: infatti, per la (7) queste relazioni equivalgono a $\overline{PQ} > 0$ e $\overline{PQ} = 0$, rispettivamente. Analogamente si verifica anche per la distanza $\overline{\overline{PQ}}$ la proprietà di sim-

* In altre parole; distanze, aree, volumi, angoli... nella « realtà esterna » sono misure di altrettante grandezze fisiche: quando si tratta di « misure dirette » la scelta di un'unità di misura comporta quelle di un « campione » e dello « strumento » col quale si confronta l'oggetto col campione per ottenere la misura che interessa

metria e la disuguaglianza triangolare. Tralasciando gli assiomi A2, A3, A6 in cui non interviene la distanza, vediamo l'assioma A4.

Sappiamo che se per i punti A, B, C di una stessa retta si ha $A < B < C$, risulta

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

Moltiplicando membro a membro questa uguaglianza per l, otteniamo $l\,AC = l\,\overline{AB} + l\,\overline{BC}$, cioè

$$\overline{\overline{AC}} = \overline{\overline{AB}} + \overline{\overline{BC}}$$

Dunque la relazione che esprime l'assioma A4 è soddisfatta anche dalla nuova distanza. Lasciamo al lettore di fare la verifica anche per gli assiomi A5 e A9, in modo analogo.

Quanto agli assiomi A7, A8 e A10, basta osservare che un'isometria rispetto alla distanza originaria è pure un'isometria rispetto alla nuova distanza; anche le simmetrie assiali si conservano, per la stessa ragione e, di conseguenza, si conservano la relazione di ortogonalità fra le rette e le misure degli angoli■

Per rendere piú agile il nostro discorso, fissiamo una convenzione: *chiameremo* **puramente geometriche** *quelle relazioni e quelle proprietà geometriche che rimangono inalterate quando si fa il cambiamento di distanza espresso dalla* (7), *qualunque sia il numero positivo* l.

Ad esempio, la seguente relazione fra i punti A, B, C, D: $\overline{AB} > \overline{CD}$ è puramente geometrica perché è equivalente alla $\overline{\overline{AB}} > \overline{\overline{CD}}$, mentre la relazione $\overline{AB} > 3$ non è puramente geometrica perché diventa (moltiplicando membro a membro per il numero l) $\overline{\overline{AB}} > 3l$, che è diversa. Evidentemente, è puramente geometrica la relazione di ortogonalità fra due rette.

In pratica, le relazioni puramente geometriche sono quelle che non dipendono dalla scelta dell'unità di misura. L'affermazione I ci dice che gli assiomi della geometria sono formulati mediante relazioni puramente geometriche. Evidentemente, se una relazione puramente geometrica risulta vera nella nostra geometria, essa risulta vera in ognuna delle infinite geometrie che si ottengono con un semplice cambiamento della distanza del tipo (7).

Come dicevamo, il contenuto dell'affermazione I è abbastanza scontato, perché siamo già certi che le proprietà piú profonde della nostra geometria non possono dipendere dal fatto che si misurino le distanze in metri, o in centimetri o in piedi... Un'osservazione piú profonda può scaturire dal tener conto che nella nostra geometria ci sono le similitudini; vedremo ora che *applicando una similitudine possiamo ottenere lo stesso effetto di un cambiamento di scala, però senza uscire dalla nostra geometria, cioè senza cambiare la distanza.*

Per spiegare chiaramente questa idea, cerchiamo di materializzarla per mezzo di un'operazione concreta. Supponiamo che l'insegnante spieghi alla classe un teorema di geometria servendosi della lavagna luminosa: egli traccia rette, manda perpendicolari... insomma sviluppa le costruzioni geometriche che gli permettono di arrivare alla tesi. Le figure vengono riprodotte sullo schermo: la trasformazione che fa passare dal foglio trasparente su cui l'insegnante scrive allo schermo può essere considerata una similitudine che modifica le distanze secondo un rapporto $l > 0$. Cerchiamo di elencare — sulla base delle proprietà della similitudine che abbiamo studiato — i fatti piú salienti che accadono in questa trasformazione:

— *i punti vanno a finire in punti, le rette in rette;*

— *una relazione d'ordine si trasporta da una retta alla retta corrispondente; un segmento va a finire in un segmento, un semipiano in un semipiano;*

— *se due punti P, Q sono fra loro simmetrici rispetto*

ad una retta $\mathcal{R}$, i loro corrispondenti P', Q' sono fra loro simmetrici rispetto alla retta corrispondente $\mathcal{R}'$;

— *due rette ortogonali fra loro sono trasformate in due rette ortogonali; piú in generale, è conservata la misura degli angoli;*

— *se P e Q sono due punti qualunque e P', Q' i loro corrispondenti, si ha $\overline{P'Q'} = l\,\overline{PQ}$.*

Che cosa possiamo concludere osservando il modo di operare del nostro insegnante? Una cosa ovvia e profonda nello stesso tempo: che mentre egli dimostra un teorema di geometria, la lavagna luminosa dimostra automaticamente un secondo teorema (nella stessa geometria!) avente un enunciato del tutto uguale al primo, tranne che per le distanze, le quali vengono tutte moltiplicate per un numero l positivo.

Possiamo formulare questa osservazione nel seguente modo:

II - *Ogni teorema della nostra geometria rimane vero se tutte le distanze che compaiono nella sua formulazione vengono moltiplicate per uno stesso numero $l > 0$, lasciando inalterato per il resto il suo enunciato.*

Vediamo un esempio, come verifica. Consideriamo il teorema di Pitagora:

Se in un triangolo ABC l'angolo in A è retto, si ha

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

Accanto a questo enunciato deve essere vero un secondo enunciato che dice cosí:

Se in un triangolo ABC l'angolo in A è retto, si ha, per ogni numero $l > 0$

$$(l\overline{AB})^2 + (l\overline{AC})^2 = (l\overline{BC})^2$$

In questo caso abbiamo ottenuto dall'affermazione II una conseguenza del tutto banale, perché la relazione trovata era semplicemente quella già nota, moltiplicata membro a membro per l^2. Ma in altri casi si possono trarre conseguenze assai piú interessanti.

Facciamo ancora un'osservazione:

III - *Se due punti P, Q soddisfano ad una relazione puramente geometrica, esistono altri due punti, aventi fra loro distanza arbitraria, che soddisfano alla medesima relazione.*

Infatti, se facciamo una similitudine di rapporto l, la nostra relazione (che, per ipotesi, è *puramente geometrica*) viene conservata, mentre le distanze vengono moltiplicate per l. Dunque si può fare in modo che P e Q vengano mutati in punti P' e Q' aventi fra loro distanza arbitraria.

Questa osservazione ci dice, in sostanza, che nella nostra geometria non c'è alcuna distanza privilegiata. Per renderci conto che si tratta di un'affermazione significativa, consideriamo un tipo di geometria in cui essa non vale. Abbiamo accennato piú volte alla geometria della sfera (se si vuole un modello concreto che ci interessa direttamente, si può pensare alla superficie della Terra). In questa geometria abbiamo distanze privilegiate: ad esempio, la distanza fra due punti N, S posti agli antipodi. La proprietà che caratterizza le coppie di punti (N, S) che si trovano fra loro agli antipodi è la seguente:

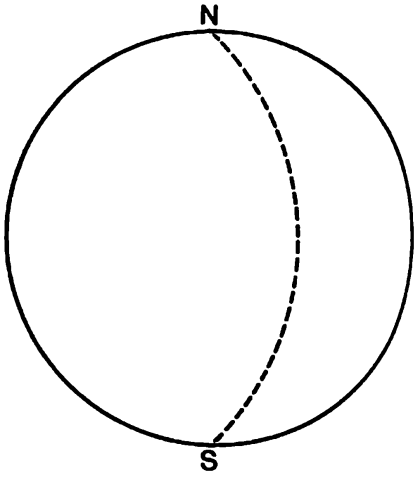


Fig. 10

«*La distanza $\overline{NS}$ è la massima possibile*»;

ossia

« *Non esiste alcuna coppia di punti* (P, Q) *tale che* $\overline{PQ} > \overline{NS}$ ».

Si tratta di una proprietà puramente geometrica, perché la sua formulazione non muta se le distanze vengono moltiplicate per uno stesso numero $l > 0$; tuttavia è evidente che non vale l'affermazione III. (Se c'è una coppia di punti a distanza massima non vi può essere una coppia di punti a distanza maggiore!).

Effettivamente, nel caso della sfera non esistono similitudini proprie, cioè non esiste una trasformazione della sfera in sé che modifichi le distanze secondo un rapporto $l \neq 1$. Naturalmente, si può trasformare per similitudine una sfera in un'*altra* sfera piú grande o piú piccola, nello spazio, ma questo è un altro discorso.

Quando c'è una lunghezza privilegiata, è naturale prenderla come unità di misura; ad esempio, sulla Terra si può prendere come unità di misura la lunghezza di un meridiano. Qualcosa di simile abbiamo fatto con gli angoli; esistono infatti angoli privilegiati definiti da particolari proprietà geometriche, come l'angolo piatto. Era quindi naturale, come abbiamo fatto, fissare l'unità di misura degli angoli in relazione a questi angoli privilegiati.

21.4 Un altro punto di vista da cui è interessante rivedere la nostra geometria è quello delle trasformazioni che abbiamo impiegato: le isometrie (con le varie sottospecie: le simmetrie assiali e centrali, le traslazioni, le rotazioni), le similitudini (con la sottospecie delle omotetie). Ora ci interessa vedere come si comportano le trasformazioni di ciascuna di queste famiglie, quando vengono fatte interagire fra loro mediante l'operazione di composizione. Consideriamo, ad esempio, la famiglia **S** delle similitudini; abbiamo già scoperto le seguenti proprietà, che è opportuno mettere in evidenza:

I gruppi di trasformazioni

G.1. *La composizione $f \circ g$ di due similitudini f, g è una similitudine.*

G.2. *La composizione gode della proprietà associativa, cioè se f, g, h sono similitudini si ha $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.* (Abbiamo già notato nel § 16.3 che questa proprietà vale per la composizione di due qualsiasi applicazioni).

G.3. *Esiste la similitudine identica, cioè la similitudine I tale che per ogni similitudine f si ha $I \circ f = f \circ I = f$.* Infatti, è evidente che l'applicazione identica rientra fra le similitudini. Per enunciare piú chiaramente un'ulteriore proprietà, premettiamo una convenzione: data un'applicazione bigettiva f indicheremo con f^{-1} l'applicazione inversa. Ciò premesso, possiamo affermare:

G.4. *Per ogni similitudine f esiste la similitudine inversa f^{-1}.*

Infatti l'applicazione inversa di una similitudine è una similitudine, come abbiamo notato.

Se ora passiamo alla famiglia **I** delle isometrie, ci accorgiamo che le proprietà G.1, G.2, G.3, G.4, valgono tali quali (naturalmente, sostituendo negli enunciati la parola «similitudine» con «isometria»). Questa constatazione ci porta spontaneamente ad una generalizzazione.

*Sia T un insieme qualsiasi, e sia **G** una famiglia di trasformazioni di T (cioè di applicazioni bigettive di T in sé); se **G** gode delle proprietà* G.1, G.2, G.3, G.4, *si dice che **G** è un* **gruppo di trasformazioni.**

Dunque la famiglia **S** delle similitudini è un gruppo di trasformazioni, cosí pure la famiglia **I** delle isometrie. Abbiamo già notato che le isometrie sono particolari similitudini, cioè che **I** è un sottoinsieme di **S**. Con maggior precisione, si dice che **I** è un **sottogruppo** di **S**, volendo

alludere al fatto che le operazioni di composizione e di inversione eseguite su elementi di **I** danno risultati che appartengono sempre ad **I**.

L'insieme delle simmetrie assiali non è un gruppo perché componendo due simmetrie assiali si ottiene un'isometria che non è una simmetria assiale. Infatti una simmetria assiale ha come punti fissi tutti e soli i punti di una retta (l'asse) mentre il prodotto di due simmetrie assiali ha:

— un solo punto fisso, nel caso che gli assi siano incidenti (caso della rotazione);

— nessun punto fisso, nel caso che gli assi siano paralleli e disgiunti (caso della traslazione diversa dell'identità);

— tutti i punti fissi, nel caso che gli assi siano coindenti (caso dell'identità).

L'insieme delle traslazioni del piano è un gruppo (ricordiamo che il prodotto di due traslazioni è una traslazione e l'inversa di una traslazione è una traslazione) ed è perciò un sottogruppo del gruppo **I** delle isometrie ed anche del gruppo **S** delle similitudini.

L'insieme delle rotazioni aventi lo stesso centro O è un gruppo.

La definizione che abbiamo dato non riguarda solo trasformazioni del piano, ma di un qualsiasi insieme T. Possiamo, ad esempio, considerare il caso in cui T sia un insieme finito. Abbiamo già considerato questa situazione nel § 12.4; abbiamo introdotto il termine **sostituzione** per indicare una trasformazione di un insieme finito. Consideriamo, ad esempio l'insieme di tre elementi $\{a, b, c\}$; le sostituzioni che si possono definire su di esso sono in numero di $3! = 6$. Possiamo elencarle facilmente:

$$I = \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ a\,b\,c \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ a\,c\,b \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ c\,b\,a \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ b\,a\,c \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ b\,c\,a \end{pmatrix}, \quad \nu = \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ c\,a\,b \end{pmatrix}$$

La convenzione con cui indichiamo queste sostituzioni è chiara, ed è stata già usata altre volte: ad esempio, μ è l'applicazione $a \to b$, $b \to c$, $c \to a$. Vediamo come si compongono queste sostituzioni. Si ha, ad esempio:

$$\beta \circ \alpha = \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ c\,a\,b \end{pmatrix} = \nu$$

La famiglia di tutte le 6 sostituzioni che operano sull'insieme $\{a, b, c\}$ è un gruppo di trasformazioni. Lasciamo allo studioso il compito di calcolare i risultati dell'operazione di composizione eseguiti per tutte le possibili coppie, verificando che coincidono con quelli della tabella qui riportata (all'incrocio della orizzontale corrispondente a β e della verticale corrispondente ad α si trova $\alpha \circ \beta$, ...).

$\circ$	I	α	β	γ	μ	ν
I	I	α	β	γ	μ	ν
α	α	I	ν	μ	γ	β
β	β	μ	I	ν	α	γ
γ	γ	ν	μ	I	β	α
μ	μ	β	γ	α	ν	I
ν	ν	γ	α	β	I	μ

Fig. 11

Questo calcolo ci fa compiere molte interessanti osservazioni; ad esempio si ha

$$\alpha \circ \beta = \mu$$

Dunque è $\beta \circ \alpha \neq \alpha \circ \beta$, cioè *non vale in generale la proprietà commutativa*. Avevamo già notato nel § 12.3 che, in generale, l'operazione di composizione non è commutativa.

Anche nel gruppo **I** delle isometrie la proprietà commutativa, in generale, non vale. Per dimostrarlo, scegliamo un esempio particolarmente facile (fra gli innumerevoli esempi che si possono considerare). Siano s_1 ed s_2 due simmetrie assiali con assi distinti e paralleli fra loro. Sappiamo che

$s_2 \circ s_1$ rappresenta una traslazione in direzione perpendicolare agli assi (cfr. § 16.5); anche $s_1 \circ s_2$ rappresenta una traslazione: *la traslazione opposta.* Infatti è $(s_2 \circ s_1) \circ (s_1 \circ s_2) = s_2 \circ (s_1 \circ s_1) \circ s_2 = s_2 \circ s_2 = I$. (Ricordiamo sempre che ogni simmetria assiale è involutoria). Dunque è $s_2 \circ s_1 \neq s_1 \circ s_2$, cioè non vale la proprietà commutativa.

Esercizi

1 Dimostrare che l'insieme delle omotetie con centro O fissato è un gruppo di trasformazioni.

2 Studiare il gruppo delle sostituzioni che operano nell'insieme di tre elementi: $\{a, b, c\}$: quali sono i suoi sottogruppi? Vi sono dei sottogruppi all'interno dei quali vale la proprietà commutativa? (Fra i sottogruppi si deve elencare sia il gruppo stesso, sia quello costituito dalla sola identità).

3 Verificare che se f e g sono trasformazioni di un insieme la trasformazione $(f \circ g)^{-1}$, cioè l'inversa di $f \circ g$, è $g^{-1} \circ f^{-1}$.

4 Verificare *per via analitica* che la composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli, distinti, non è commutativa. (Prendere gli assi opportunamente)

5 Siano s_1, s_2 due simmetrie assiali con assi incidenti. Dimostrare che se $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1$ gli assi di s_1 ed s_2 sono fra loro ortogonali. (Dunque, per due simmetrie assiali con assi incidenti non ortogonali non vale la proprietà commutativa).

6 Studiare il gruppo delle isometrie che trasformano in sé un rettangolo $ABCD$ (con $\overline{AB} \neq \overline{BC}$). (Elencare le isometrie e indicarle con lettere, compilare la tabella di composizione, dire se vale la proprietà commutativa).

7 Studiare il gruppo delle isometrie che trasformano in sé un quadrato $ABCD$. (Elencare le isometrie, indicarle con lettere, ecc.).

* **8** Dimostrare che l'unione di tutte le traslazioni e tutte le rotazioni del piano costituisce un gruppo.
(Si tratta del gruppo delle isometrie che sono chimate *dirette:* intuitivamente, sono le isometrie che si ottengono facendo scorrere un foglio di carta sul tavolo senza staccarlo).

La nozione di gruppo

21.5 Fra le attività matematiche piú tipiche c'è quella dell'astrazione. Essa consiste nel trascurare le questioni di dettaglio per porre l'accento sui fatti piú profondi, che si ritrovano in un grande numero di casi concreti. Non è sempre facile vedere quali sono gli aspetti piú interessanti che

meritano di essere astratti e presentati in forma generale; inoltre, nel maneggiare le teorie astratte occorre sempre pensare agli esempi concreti di cui disponiamo, altrimenti la nostra intuizione non ha nulla su cui far presa.

In questo paragrafo vogliamo seguire un po' questa tendenza all'astrazione; il nostro scopo è semplicemente quello di suggerire qualche spunto, che potrà eventualmente essere ripreso ad un successivo livello di studi.

Cominciamo dunque col riesaminare le proprietà G.1 , G.2 , G.3 , G.4 dei gruppi di trasformazioni; ci accorgiamo che esse possono essere assunte a livello piú astratto, trascurando il fatto che gli enti di cui ci occupiamo siano trasformazioni e che l'operazione sia la composizione.

Supponiamo dunque che sia dato un insieme $\mathbf{G}$ e, in esso, un'operazione di composizione interna, cioè un'applicazione di $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$ in $\mathbf{G}$ che indicheremo con il simbolo $*$. Supponiamo che valgano le seguenti proprietà:

Γ_1 - *L'operazione* $*$ *è associativa, cioè se* f, g, h *sono elementi di* $\mathbf{G}$, *si ha*

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

Γ_2 - *Esiste in* $\mathbf{G}$ *un elemento neutro (o unità)* I, *tale cioè che si abbia per ogni elemento* f *di* $\mathbf{G}$

$$f * I = I * f = f$$

Γ_3 - *Per ogni elemento* f *di* $\mathbf{G}$ *esiste un reciproco (o inverso), cioè un elemento* f^{-1} *tale che*

$$f * f^{-1} = f^{-1} * f = I$$

Un insieme G *dotato dell'operazione* $*$ *con le proprietà* Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 *si dice un* **gruppo.**

È chiaro che la definizione di *gruppo di trasformazioni* data nel § precedente è un caso particolare: quello in cui gli elementi di G siano trasformazioni definite in un certo insieme e l'operazione $*$ sia l'ordinario prodotto di composizione $\circ$.

La notazione completa con cui si indica un gruppo è: $\{G , *\}$. Con essa si designa non solo l'insieme G, ma anche l'operazione di composizione interna $*$ che in esso è definita.

Nella definizione generale ora introdotta rientrano vari gruppi che già abbiamo conosciuto: ad esempio, $\mathbf{Z}$ (insieme degli interi relativi), $\mathbf{Q}$ (insieme dei razionali relativi), $\mathbf{R}$ (insieme dei numeri reali), tutti *con l'operazione di addizione*. Analogamente, $\mathbf{Q} \setminus \{0\}$, cioè l'insieme dei numeri razionali relativi con esclusione dello zero, è un gruppo se si assume come operazione di composizione interna *la moltiplicazione*. Rispetto a questi esempi piú elementari la maggiore generalità della definizione di gruppo che ora abbiamo dato consiste nel lasciare cadere la proprietà commutativa.

Un gruppo $\{G , *\}$ *in cui l'operazione* $*$ *sia commutativa si dice commutativo, o anche abeliano**. Ad esempio, $\{Z , +\}$, $\{R , +\}$, il gruppo delle traslazioni, il gruppo delle rotazioni di assegnato centro sono tutti gruppi commutativi.

La definizione di gruppo ci permette di vedere sotto la stessa luce oggetti matematici che, all'apparenza, sembrano molto distanti fra loro; nell'esempio che ora presentiamo, mettiamo a confronto un gruppo di trasformazioni geometriche con un gruppo che abbiamo già incontrato in algebra.

* Dal nome del matematico N. Abel (1802-1829). Pur nel breve e tormentoso arco della sua vita, egli fece scoperte di straordinaria importanza.

Consideriamo, nel piano, un esagono regolare di centro O e di vertici (ordinatamente) A_0 , A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5 . Dalla definizione di poligono regolare sappiamo che esiste una rotazione s che porta A_0 in A_1 , A_1 in A_2, ecc.:

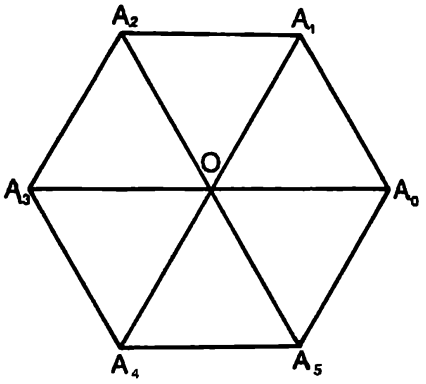


Fig. 12

$$A_0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4 \to A_5 \to A_0$$

Dunque

$$s(A_0) = A_1 \ , \ s(A_1) = A_2 \ , \ \dots \ , \ s(A_4) = A_5 \ ,$$

$$s(A_5) = A_0$$

Indichiamo con s^k la composizione

$s \circ s \circ \dots \circ s$ (dove s compare k volte)

e poniamo $s^0 = I$ (identità), $s^1 = s$. Chiameremo s^k *potenza k-esima* di s. Si ha:

$$s^0(A_0) = A_0 \ , \ s^1(A_0) = A_1 \ , \ s^2(A_0) = A_2$$
$$s^3(A_0) = A_3 \ , \ s^4(A_0) = A_4 \ , \ s^5(A_0) = A_5$$

e, inoltre

$$s^6(A_0) = A_0$$

Ma, poiché una rotazione è individuata quando è detto come si trasforma un qualsiasi punto diverso dal centro, si avrà, per ogni punto P,

$$s^6(P) = P$$

cioè, brevemente,

$$s^6 = I$$

Consideriamo allora il seguente insieme di 6 rotazioni:

$$\boldsymbol{R}_6 = \{s^0 = I\,,\, s^1\,,\, s^2\,,\, s^3\,,\, s^4\,,\, s^5\}$$

Esso è un gruppo di trasformazioni (un sottogruppo del gruppo delle rotazioni con centro O).

Per dimostrare che $\{\boldsymbol{R}_6\,,\, \circ\}$ è un gruppo, teniamo conto anzitutto che in $\boldsymbol{R}_6$ c'è l'identità e che l'operazione $\circ$ è associativa. Resta allora da verificare:

a) che l'operazione $\circ$ fa corrispondere ad ogni coppia di elementi di $\boldsymbol{R}_6$ un elemento di $\boldsymbol{R}_6$.

b) che ogni elemento di $\boldsymbol{R}_6$ ha un reciproco n $\boldsymbol{R}_6$.

Per verificare la *a*) cominciamo con un caso particolare:

$$s^5 \circ s^3 = s^8 = s^6 \circ s^2 = I \circ s^2 = s^2$$

In generale, siano s^h ed s^k $(0 \leqslant h < 6\,,\; 0 \leqslant k < 6)$ due elementi di $\boldsymbol{R}_6$. Si avrà

$$s^h \circ s^k = s^{h+k} = s^r$$

avendo indicato con r il resto della divisione di $h + k$ per 6. Essendo $0 \leqslant r < 6$, il risultato è effettivamente in $\boldsymbol{R}_6$.

Per verificare la *b*), si comincia osservando che $s^{-1} = s^5$, infatti $s^5 \circ s = s^6 = I$, $s \circ s^5 = s^6 = I$.

Risulta poi $(s^k)^{-1} = s^{-1} \circ s^{-1} \circ \ldots \circ s^{-1}$ (dove s^{-1} compare k volte).

Infatti

$$\underbrace{s^{-1} \circ s^{-1} \circ \ldots \circ s^{-1}}_{k \text{ volte}} \circ \underbrace{s \circ s \circ \ldots \circ s}_{k \text{ volte}} = I$$

Dunque $(s^k)^{-1} = s^{5k} = s^t$, avendo indicato con t il resto della divisione di $5k$ per 6.

Questo procedimento che abbiamo seguito ci ricorda un altro gruppo che abbiamo già studiato: $\{Z_6 , +\}$. Cioè il gruppo delle classi di resti modulo 6, *con l'operazione di addizione* (cfr. § 19.6). Sappiamo che Z_6 è anche un anello, cioè è dotato di un'operazione di moltiplicazione, ma qui ci interessa solo l'addizione.

L'applicazione

$$k \longrightarrow s^k \tag{8}$$

associa ad ogni elemento di Z_6 un elemento di R_6 ed è bigettiva. Prendiamo ora due elementi h , k in Z_6; la loro somma in Z_6 è rappresentata dal resto r della divisione di $h + k$ per 6. Componiamo ora in R_6 i corrispondenti di h e di k, cioè s^h ed s^k: il risultato è $s^h \circ s^k = s^{h+k} = s^r$; dunque *si ottiene lo stesso risultato applicando l'operazione di gruppo in* Z_6 *e poi eseguendo la* (8), *oppure applicando prima la* (8) *a ciascuno dei termini* h , h *e poi componendo i risultati in* R_6.

Siamo di fronte ad una scoperta veramente significativa, tale da meritare una nuova definizione:

Due gruppi, $\{G , *\}$ e $\{G' , \star\}$, *si dicono* **isomorfi** *fra loro se esiste un'applicazione bigettiva* φ *di* G *in* G' *che conserva i risultati delle operazioni di composizione interna, tale cioè che per ogni coppia* (x , y) *di elementi di* G *si ha*

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) * \varphi(y)$$

Con questo linguaggio possiamo dire che $\{\boldsymbol{Z}_6 , +\}$ e $\{\boldsymbol{R}_6 , \circ\}$ sono fra loro isomorfi. Naturalmente, per ogni intero $n \geq 3$, $\{\boldsymbol{Z}_n, +\}$ è isomorfo al gruppo delle rotazioni che trasformano in sé un poligono regolare di n lati.

Due gruppi isomorfi hanno lo stesso numero di elementi (perché l'isomorfismo è un'applicazione bigettiva), ma hanno anche tante altre proprietà in comune; insomma: *tutte le proprietà che si possono esprimere nel linguaggio dei gruppi, cioè attraverso l'operazione di composizione interna, sono comuni ai due gruppi.* Quindi due gruppi isomorfi possono essere visti come uno stesso oggetto matematico, malgrado la diversa definizione concreta.

Vocaboli e simboli

similitudine; **rapporto** di similitudine, **scala**
omotetia
proprietà, relazioni **puramente geometriche**
gruppo di trasformazioni
gruppo
sottogruppo
gruppi fra loro **isomorfi**

Esercizi

1 Il gruppo delle sostituzioni nell'insieme di tre elementi $\{a , b , c\}$ (che abbiamo studiato nel § precedente) è isomorfo con $\{\mathbf{Z}_6 , +\}$?

2 Dimostrare che il gruppo delle sostituzioni nell'insieme di tre elementi $\{a , b , c\}$ è isomorfo con il gruppo delle isometrie che trasformano in sé un triangolo equilatero.

3 Sia $\{\mathbf{G} , *\}$ un gruppo finito, cioè avente un numero finito di elementi. Dimostrare che per ogni suo elemento g esiste un intero positivo k tale che g^k è uguale all'identità. (Come nel testo, g^k significa $g * g * \ldots * g$, dove g compare k volte).

4 Dimostrare che il gruppo $\{\mathbf{R}^+, \cdot\}$ (cioè il gruppo dei numeri reali positivi con l'operazione di moltiplicazione) è isomorfo al gruppo delle omotetie con un centro O fissato.

5 Dimostrare che, nella famiglia dei sottoinsiemi non vuoti del piano, le relazioni «B è isometrico a C», «B è simile a C» sono relazioni di equivalenza.

6 Dimostrare che la relazione di isomorfismo fra gruppi è una relazione di equivalenza.

22

L'arte del triangolo

22.1 Le funzioni circolari, che ora introdurremo, servono a stabilire un legame fra l'ampiezza degli angoli e la misura dei lati di un triangolo: ma la loro importanza va ben al di là della trigonometria; esse compaiono nei piú disparati campi della matematica e nelle applicazioni della matematica alla fisica, alla tecnologia ecc.

Definizione del coseno e del seno

Nell'introdurre queste funzioni procederemo con molta cura, e per successivi passi.

I - Anzitutto introduciamo un sistema di coordinate nell'insieme delle rotazioni che hanno un certo punto O come punto fisso; come abbiamo già visto nel § 20, fissando una semiretta di riferimento, questo insieme si può mettere in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle semirette con origine O, oppure con il cerchio U di centro O e raggio 1. Possiamo procedere in analogia con quanto abbiamo fatto per introdurre un sistema di coordinate sulla retta (assioma A5); utilizzeremo la misura degli angoli (assioma A10). Precisamente: preso un sistema di assi cartesiani con origine in O, scegliamo come angolo piatto il semipiano $y > 0$ ed assumiamo come semiretta di riferimento $\mathfrak{X}^+$ (semiasse positivo di $\mathfrak{X}$).

Ad ogni semiretta $\mathfrak{R}$ di origine O interna all'angolo piatto possiamo far corrispondere un numero $\alpha = \measuredangle(\mathfrak{X}^+, \mathfrak{R})$, con $0 < \alpha < \pi$; viceversa ad ogni numero α in questo intervallo corrisponde una semiretta $\mathfrak{R}$ interna al nostro angolo piatto tale che $\alpha = \measuredangle(\mathfrak{X}^+, \mathfrak{R})$.

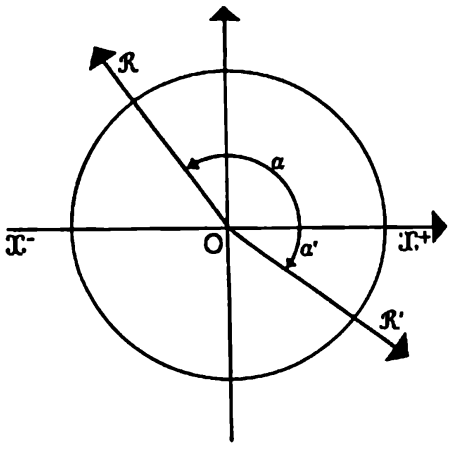


Fig. 1

Possiamo estendere questa corrispondenza ai lati dell'angolo piatto associando al valore $\alpha = 0$ la semiretta $\mathfrak{X}^+$ e ad $\alpha = \pm$ la semiretta $\mathfrak{X}^-$ (semiasse negativo di $\mathfrak{X}$).

Restano le semirette interne all'angolo piatto « inferiore », cioè interne al semipiano $y < 0$; quale coordinata dobbiamo attribuire ad esse? L'analogia con quanto abbiamo fatto per stabilire un sistema di coordinate su una retta ci suggerisce di porre, per una semiretta $\mathcal{R}'$ interna all'angolo piatto « inferiore »: $\alpha = -\measuredangle(\mathfrak{X}^+, \mathcal{R}')$; in altre parole, come coordinata prendiamo la misura dell'angolo $(\mathfrak{X}^+, \mathcal{R}')$ col segno negativo. Non c'è bisogno di considerare le semirette $\mathfrak{X}^+$, $\mathfrak{X}^-$ perché ad esse abbiamo già assegnato una coordinata.

Ci occorre un nuovo simbolo; indicheremo, d'ora in poi, con $]a, b]$ un intervallo della retta reale costituito da tutti i numeri compresi fra a e b, con inclusione dell'estremo b ed esclusione dell'estremo a. In altre parole, porremo

$$]a, b] = \{x : a < x \leq b\}$$

analogamente, porremo:

$$[a, b[= \{x : a \leq x < b\}$$

$$]a, b[= \{x : a < x < b\}$$

Possiamo allora così concludere questo primo passo: *con il procedimento descritto abbiamo costruito un'applicazione bigettiva*

$$]-\pm, \pm] \longrightarrow \mathbf{U}$$

(che può essere, indifferentemente, intesa come applicazione bigettiva sull'insieme delle semirette

con centro O o sull'insieme delle rotazioni che hanno come punto fisso O). Il numero α che viene cosí associato al punto di **U** (o alla semiretta con origine O) verrà detto **coordinata angolare.**

II - Prendiamo ora una qualunque retta *orientata* $\mathcal{R}$ (cioè una retta in cui sia stata fissata una relazione di ordine) passante per O. Su $\mathcal{R}$ risulta definito un sistema di coordinate con origine O.

Sia $P \leftrightarrow (x, y)$ un punto di $\mathcal{R}$ e sia s la sua coordinata. Ora possiamo affermare che *il rapporto* $\frac{x}{s}$ *è costante al variare di* P *su* $\mathcal{R}$ $(P \neq O)$. In primo luogo, è costante il valore assoluto, essendo

$$\left|\frac{x}{s}\right| = \frac{|x|}{|s|} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}$$

e avendo indicato con P' la proiezione di P sull'asse $\mathfrak{X}$: ricordiamo infatti che il *rapporto di proiezione* $\dfrac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}$ è costante, in base all'assioma A7.

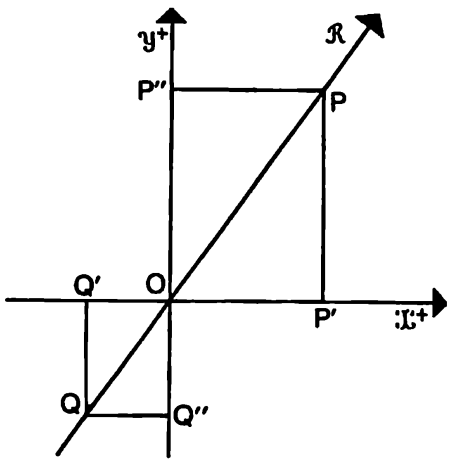


Fig. 2

Ma il rapporto $\frac{x}{s}$ non cambia segno al variare di P su $\mathcal{R} \setminus \{O\}$; infatti, se P varia su una delle due semirette di $\mathcal{R}$ con origine O, tanto s che x non cambiano di segno, mentre se P passa nella semiretta opposta tanto x che s cambiano di segno.

Il rapporto $\frac{x}{s}$ potrà essere chiamato **rapporto di proiezione con segno sull'asse** $\mathfrak{X}$. Allo stesso modo si dimostra che $\frac{y}{s}$ (**rapporto di proiezione con segno sull'asse** $\mathfrak{Y}$) si mantiene costante al variare di P su $\mathcal{R} / \{O\}$.

Fissato α nell'intervallo $]-\pi, \pi]$, risulta individuata la retta orientata $\mathcal{R}$, la cui semiretta positiva ha un'ascissa angolare α; per avere i rapporti di proiezione con segno di questa retta, si può fare $s = 1$, cioè si possono prendere le coordinate del punto P che la semiretta positiva stacca sul cerchio **U**.

Possiamo finalmente dare la nostra definizione*:

Preso un numero α nell'intervallo $]-\pi, \pi]$ si dicono $\cos\alpha$ (**coseno** *di* α) *e* $\sin\alpha$ (**seno** *di* α) *rispettivamente, l'ascissa e l'ordinata del punto di* **U** *di coordinata angolare* α; *pertanto* $\cos\alpha$ *e* $\sin\alpha$ *sono i rapporti di proiezione con segno sull'asse* $\mathfrak{X}$ *e sull'asse* $\mathfrak{Y}$, *rispettivamente, della retta orientata di coordinata angolare* α.

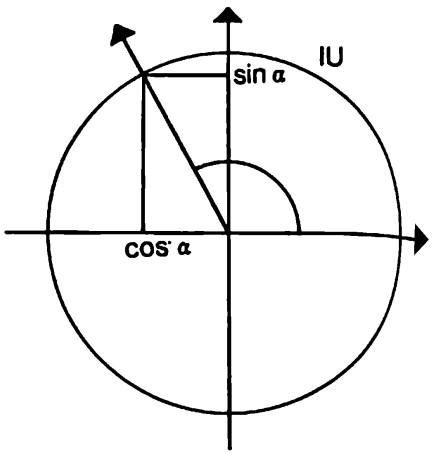


Fig. 3

III - Mettiamo subito in evidenza una relazione importante: *per ogni valore di* α *si ha*

$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1 \qquad (1)$$

La dimostrazione è immediata: il primo membro rappresenta il quadrato della distanza che il punto $P \leftrightarrow (\cos\alpha, \sin\alpha)$ ha dall'origine. Ma il punto P appartiene ad **U**: la sua distanza dall'origine è 1 ■

Il fatto che le funzioni coseno e seno siano definite senza ambiguità non deve far pensare che esse possano essere calcolate, a partire da α, mediante una formula che utilizzi operazioni a noi già note. Tuttavia, per valori *particolari* di α il coseno e il seno si possono facilmente calcolare.

a) Prendiamo $\alpha = 60°$ (in gradi sessagesimali). Il punto P è il vertice di un triangolo equilatero che ha gli altri due vertici in $O \leftrightarrow (0, 0)$ e in $A \leftrightarrow (1, 0)$.

* Stiamo attenti a non confondere, in questa definizione, la coordinata angolare della retta $\mathcal{R}$ con la coordinata del punto P sulla retta $\mathcal{R}$.

Allora dal teorema di Pitagora abbiamo subito

$$\begin{cases} \cos 60° = \dfrac{1}{2} \\ \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

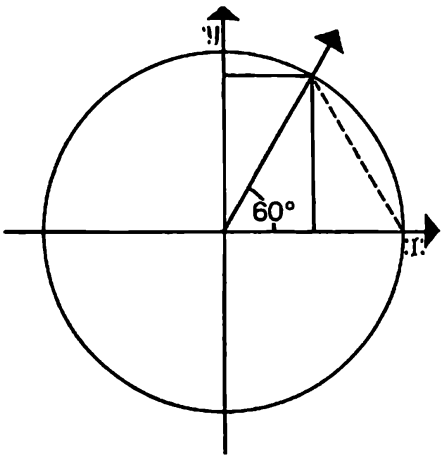


Fig. 4

b) È ancora piú facile trovare i valori di cos 45° e sin 45°.

Poiché la semiretta corrispondente ad $\alpha = 45°$ è la bisettrice del primo quadrante, deve essere cos 45° = sin 45°, perciò

$$\begin{cases} \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

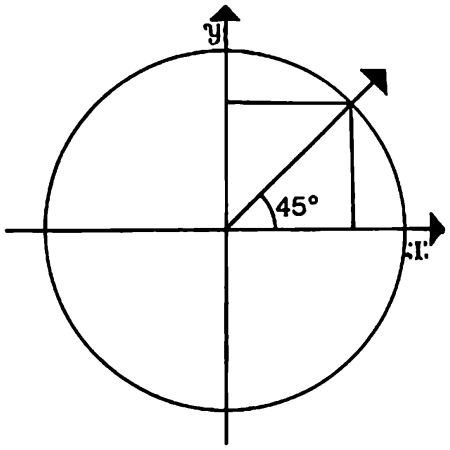


Fig. 5

c) Prendiamo ora $\alpha = 18°$; evidentemente sin 18° è la metà del lato del decagono regolare inscritto nel cerchio **U**. Da quanto visto nei §§ 18.2 e 21.2 ricaviamo $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Per ottenere il coseno, ricorriamo alla relazione (1) (tenendo presente che certamente è cos 18° > 0):

$$\cos 18° = \sqrt{1-(\sin 18°)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{16-(5-2\sqrt{5}+1)}{16}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

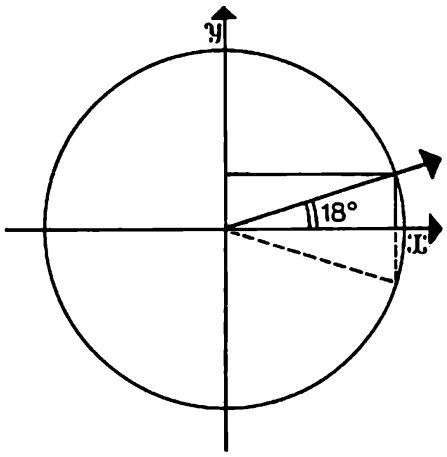


Fig. 6

Concludendo, si ha

$$\begin{cases} \cos 18° = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \\ \sin 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} \end{cases}$$

Per avere i valori approssimati del coseno e del seno si possono utilizzare le tavole riportate alla fine del capitolo. Si tratta di tavole un po' grezze (vanno di grado in grado), che sono però sufficienti per qualche semplice problema. Per avere valori meglio approssimati si può fare ricorso ad apposite tavole o, meglio ancora, alle calcolatrici tascabili, che sono ampiamente diffuse.

IV - Le funzioni circolari ci permettono di esprimere in modo interessante le coordinate cartesiane di un punto qualsiasi P del piano, diverso dall'origine. Dato un tale punto $P \leftrightarrow (x, y)$ risulta individuata un'unica semiretta $\mathcal{R}$ che ha origine in O e passa per P; essa ha una coordinata angolare θ. I rapporti di proiezione con segno di $\mathcal{R}$ sugli assi $\mathfrak{X}$ ed $\mathfrak{Y}$ sono, rispettivamente:

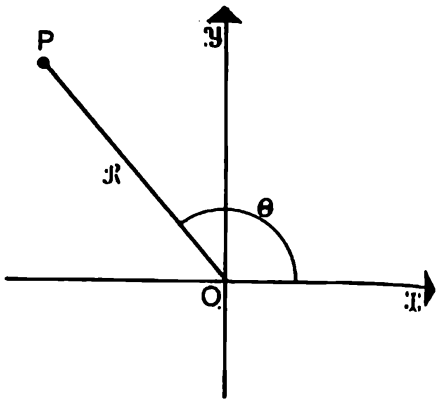


Fig. 7

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Infatti, indicando con r la distanza del punto P dall'origine, cioè $\sqrt{x^2+y^2}$, è evidente che r è la coordinata del punto P sulla retta che ha $\mathcal{R}$ come semiretta positiva. Allora, per la definizione delle funzioni circolari, si ha

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{r} = \cos\theta \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{y}{r} = \sin\theta \end{cases} \qquad (2)$$

Da queste relazioni si ricava

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \qquad (3)$$

Dunque, dato un punto $P \neq O$, risultano determinati i due numeri: r (distanza di P da O) e θ (coordinata angolare di P); viceversa, data una coppia di numeri (r, θ), dove r è un numero positivo e θ è un numero dell'intervallo $]-\pi, \pi]$, risultano definite, in base alla (3), le coordinate cartesiane del punto P. Dunque le coppie (r, θ), che costituiscono il prodotto cartesiano $\mathbf{R}^+ \times]-\pi, \pi]$, sono in corrispondenza biunivoca con i punti del piano escluso O; i numeri r, θ si dicono **coordinate polari** del punto P. Possiamo rappresentare con le nostre coordinate polari anche il punto O? È naturale fare corrispondere ad ogni coppia $(0, \theta)$ il punto O, qualunque sia il valore di θ: con ciò però, non si ha piú una corrispondenza biunivoca; dunque, quando si introducono le coordinate polari, è ragionevole prescindere dal punto O.

Esercizi

1 Tracciare un cerchio di raggio abbastanza grande (ad es. 5 cm); presi due assi cartesiani con origine nel centro, tracciare, con l'aiuto del goniometro, le semirette di coordinate angolari: 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°, 80°, 90°. Ricavare dal disegno un valore approssimato del coseno e del seno di questi angoli e confrontare i valori trovati con quelli forniti dalla tavola. (Vedere alla fine del capitolo).

2 È vero o falso che $\sin 30° + \sin 60° = \sin 90°$?

3 Con l'aiuto della tavola riportata alla fine del capitolo, trovare valori di α (approssimati a meno di un grado) tali che:

$$\sin \alpha = \frac{3}{4}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{2}, \quad \cos \alpha = 0{,}72, \quad \cos \alpha = \frac{3}{8}, \quad \text{essendo sempre } 0 \leq \alpha \leq 90°.$$

4 Una strada rettilinea in salita supera un dislivello di 85 m con un percorso di 1 km. Quale è la sua inclinazione (in gradi)?

*** 5** Sia $0 \leq \alpha \leq \pi$; supponendo di conoscere $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$, esprimere $\sin \frac{\alpha}{2}$.

6 Calcolare il coseno e il seno di 36°.

7 Un'imbarcazione si muove alla velocità costante di 20 miglia all'ora; ogni

ora compie una virata verso sinistra di 30°. Quale rotta descrive? Quale è la massima distanza fra due diversi punti della rotta?

8 Dimostrare che per ogni α con $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ si ha $\sin \frac{\alpha}{2} > \frac{1}{2} \sin \alpha$.
(La dimostrazione può essere fatta sia geometricamente che analiticamente).

9 Utilizzando le tavole, calcolare le coordinate polari dei punti di coordinate $(4, 3)$, $(-4, -3)$, $(5, -3)$, $(9, 5)$, $(-5, 8)$. (Esprimere l'angolo θ in gradi).

22.2 Nel piano cartesiano vi sono simmetrie che si possono rappresentare in modo particolarmente semplice: quelle rispetto agli assi del riferimento. Queste simmetrie si ripercuotono in alcune relazioni del tutto evidenti per le funzioni circolari.

Proprietà immediate delle funzioni coseno e seno

Consideriamo dapprima le simmetrie di asse x: essa trasforma il punto $P \leftrightarrow (x, y)$ nel punto $P' \leftrightarrow (x, -y)$ e trasforma la semiretta di origine O e coordinata angolare α nella semiretta di origine O e coordinata angolare $-\alpha$ (infatti, in base alle convenzioni che abbiamo posto per definire le coordinate angolari, questa simmetria conserva la misura degli angoli ma cambia il segno delle coordinate angolari). Sia ora P un punto di **U** di coordinata angolare α. Allora: il punto $P \leftrightarrow (\cos \alpha, \sin \alpha)$ va a finire nel punto $P' \leftrightarrow (\cos \alpha, -\sin \alpha)$; d'altra parte, poiché P' ha come coordinata angolare $-\alpha$, si ha

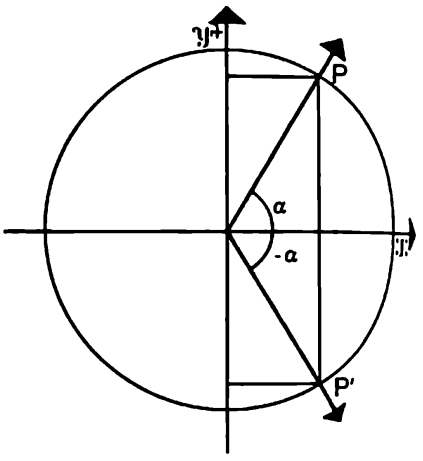


Fig. 8

$$P' \leftrightarrow (\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$$

Confrontando le due espressioni che forniscono le coordinate di P', si ha

$$\begin{cases} \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \end{cases} \tag{4}$$

Queste formule ci sono molto utili per tracciare i grafici della funzione coseno e seno. Cominciamo con la funzione coseno.

Naturalmente, è importante non fare confusione fra il significato del riferimento cartesiano usato precedentemente e quello che ora impieghiamo: qui noi riportiamo le coordinate angolari sull'asse delle ascisse $\mathcal{A}$ e i valori cos α sull'asse delle ordinate $\mathfrak{X}$.

Per tracciare il grafico potremo segnare alcuni punti noti. Ad esempio, sempre indicando con $\sharp$ la misura dell'angolo piatto si ha:

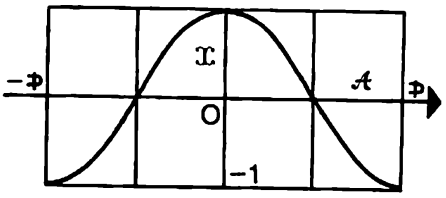


Grafico della funzione coseno.
Fig. 9

$$\cos 0 = 1 \qquad \cos \frac{2}{3}\sharp = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\sharp}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos \frac{3}{4}\sharp = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{\sharp}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos \frac{5}{6}\sharp = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\sharp}{3} = \frac{1}{2} \qquad \cos \sharp = -1$$

$$\cos \frac{\sharp}{2} = 0$$

Dunque i punti:

$$(0\,,1) \qquad \left(\frac{\sharp}{6}\,,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \left(\frac{\sharp}{4}\,,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{\sharp}{3}\,,\frac{1}{2}\right) \qquad \left(\frac{\sharp}{2}\,,0\right) \qquad \left(\frac{2}{3}\sharp\,,-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\frac{3}{4}\sharp\,,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \left(\frac{5}{6}\sharp\,,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad (\sharp\,,-1)$$

appartengono tutti al grafico. Disponendo di tavole si possono segnare altri punti del grafico e, infine, il grafico può essere tracciato con buona approssimazione.

Ma è soprattutto interessante mettere in evidenza le proprietà della funzione coseno che siamo già in grado di dimostrare.

Premettiamo una definizione: *una funzione f definita in un intervallo della retta reale, a valori reali, si dice* **crescente** *se, presi due punti qualsiasi x_1, x_2, con $x_1 < x_2$, si ha $f(x_1) < f(x_2)$; si dice* **decrescente** *se, presi due punti qualsiasi x_1, x_2, con $x_1 < x_2$, si ha $f(x_1) > f(x_2)$.*

Ciò premesso, possiamo affermare:

I - *Nell'intervallo* $]0, \frac{\pi}{2}]$ *la funzione coseno è decrescente.*

Per la dimostrazione, basta ricordare che cosa significa $\alpha' < \alpha''$; indichiamo con $\mathcal{R}'$ ed $\mathcal{R}''$ le due semirette di origine O e di coordinata angolare α' ed α''. Nel nostro caso α' ed α'', che sono numeri positivi, indicano la misura degli angoli $(\mathcal{X}^+, \mathcal{R}')$, $(\mathcal{X}^+, \mathcal{R}'')$ (rispettivamente); essendo $\alpha' < \alpha''$, la semiretta $\mathcal{R}'$ risulta interna all'angolo $(\mathcal{X}^+, \mathcal{R}'')$. Ricordiamo poi che $\cos\alpha'$, $\cos\alpha''$ sono le ascisse dei punti in cui le semirette $\mathcal{R}'$ ed $\mathcal{R}''$ tagliano il cerchio **U**: allora il teorema I del § 20.3 ci dice che è $\cos\alpha' > \cos\alpha''$ ■

Riflettiamo ora alla prima delle (4): essa ci dice che se il punto (α, x) appartiene al grafico del coseno, cioè se $x = \cos\alpha$, anche il punto $(-\alpha, x)$ appartiene al grafico, essendo $x = \cos(-\alpha)$.

Dunque:

II - *Il grafico della funzione coseno è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.*

In pratica la costruzione del grafico può essere limitata all'intervallo $]0, \frac{\pi}{2}]$; la parte del grafico relativa all'intervallo $]-\frac{\pi}{2}, 0]$ si ottiene per simmetria. Si vede anche dal grafico che:

III - *Nell'intervallo* $]-\frac{\pi}{2}, 0]$ *la funzione coseno è crescente.*

Si tratta di dimostrare che, se α' ed α'' sono due numeri reali dell'intervallo $]-\pi, 0]$ e se $\alpha' < \alpha''$, si ha $\cos \alpha' < \cos \alpha''$.

Lasciamo al lettore il compito di fare una dimostrazione formale di questa affermazione (sulla base, ovviamente, della simmetria che abbiamo riscontrata).

Procediamo in modo analogo per il grafico della funzione seno.

Riportiamo le coordinate angolari sull'asse delle ascisse $\mathcal{A}$ ed i valori di $\sin \alpha$ sull'asse delle ordinate, che indicheremo con $\mathcal{Y}$.

Anche in questo caso, possiamo cominciare con una tabella di valori; troviamo (sempre indicando con π la misura dell'angolo piatto) che i punti:

$$(0, 0) \qquad \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right) \qquad \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \left(\frac{\pi}{2}, 1\right) \qquad \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{3}{4}\pi, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \left(\frac{5}{6}\pi, \frac{1}{2}\right) \qquad (\pi, 0)$$

appartengono al grafico. Si possono segnare altri punti con l'aiuto delle tavole ed infine è possibile tracciare un grafico.

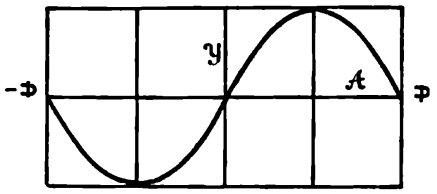


Grafico della funzione seno.

Fig. 10

Il grafico è, come quello del coseno, molto ricco di suggestioni.

Ci interessano naturalmente le proprietà suggerite dalla forma del grafico che siamo in grado di dimostrare.

IV - *La funzione seno è crescente nell'intervallo* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *ed è decrescente nell'intervallo* $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Per la dimostrazione, osserviamo che nell'intervallo $[0, \pi]$ si ha $\sin \alpha \geq 0$; dalla (1) ricaviamo allora $\sin \alpha = \sqrt{1 - (\cos \alpha)^2}$.

Facciamo variare α da 0 a $\frac{\pi}{2}$; in questo intervallo $\cos \alpha$ è positivo e decresce; dunque $(\cos \alpha)^2$ decresce; il valore della differenza $1 - (\cos \alpha)^2$, allora, risulta crescente. Ma se il radicando cresce, anche il valore della radice cresce. Cosí abbiamo dimostrato che la funzione seno è crescente in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Nell'intervallo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ la funzione coseno assume valori negativi ed è decrescente: questo significa che il suo valore assoluto è crescente e che anche il suo quadrato è crescente. Allora è evidente che la funzione $1 - (\cos \alpha)^2$ è decrescente, e che, infine, $\sin \alpha = \sqrt{1 - (\cos \alpha)^2}$ è decrescente ■

Vediamo ora anche per la funzione seno, una proprietà di simmetria.

V - *Il grafico della funzione seno è simmetrico rispetto all'origine.*

Riflettiamo infatti sulla seconda delle (4): essa ci dice che se il punto (α, γ) appartiene al grafico, cioè se è $\gamma = \sin \alpha$, anche il punto $(-\alpha, -\gamma)$ appartiene al grafico, essendo $-\gamma = \sin(-\alpha)$ ■

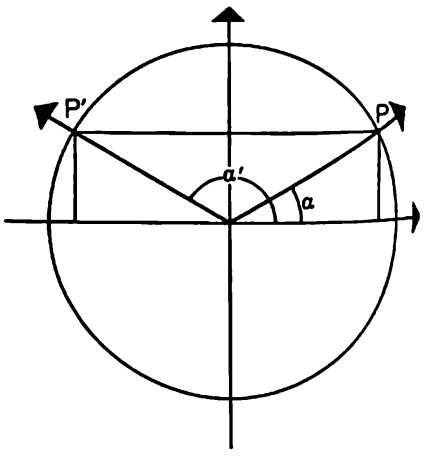


Fig. 11

Esponiamo ora altre importanti relazioni per le funzioni circolari, che vengono indotte da simmetrie rispetto agli assi cartesiani: consideriamo la simmetria rispetto all'asse $\mathcal{Y}$: essa trasforma un punto $P \leftrightarrow (x, \gamma)$ nel punto $P' \leftrightarrow (-x, \gamma)$. Sia $\mathcal{R}$ una semiretta con origine in O , interna al semipiano $\gamma > 0$; indicando con α la coordinata angolare di $\mathcal{R}$, si ha $0 < \alpha < \pi$. La semiretta

trasformata di $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$, si trova nel medesimo semipiano; si ha poi $\alpha = \measuredangle(\mathfrak{X}^+, \mathcal{R}) = \measuredangle(\mathfrak{X}^-, \mathcal{R}')$.

Infatti la nostra simmetria trasforma $\mathfrak{X}^+$ in $\mathfrak{X}^-$, $\mathcal{R}$ in $\mathcal{R}'$ ed è un'isometria: perciò conserva la misura degli angoli. Detta α' la coordinata angolare di $\mathcal{R}'$, si ha $\alpha' = \measuredangle(\mathfrak{X}^+, \mathcal{R}')$. Dalle due relazioni $\alpha' = \measuredangle(\mathfrak{X}^+, \mathcal{R}')$, $\alpha = \measuredangle(\mathfrak{X}^-, \mathcal{R}')$ si ricava $\alpha + \alpha' = \pi$, da cui $\alpha' = \pi - \alpha$. Detti allora P e P' i punti in cui $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ intersecano il cerchio unitario $\mathbf{U}$, si trova che

$$P \leftrightarrow (\cos\alpha, \sin\alpha) \quad , \quad P' \leftrightarrow (-\cos\alpha, \sin\alpha)$$

D'altra parte si ha anche

$$P' \leftrightarrow (\cos\alpha', \sin\alpha') = (\cos(\pi - \alpha), \sin(\pi - \alpha))$$

Dalle due espressioni delle coordinate di P' si ricava

$$\begin{cases} \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \\ \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \end{cases} \tag{5}$$

Occorre tenere presente però che *queste relazioni sono state ricavate — per ora — nell'ipotesi*

$$0 \leq \alpha \leq \pi$$

Dalle (4) e dalle (5) si ricava ancora un'importante coppia di relazioni. Sia $-\pi < \alpha \leq 0$; dalle (4) ricaviamo

$$\begin{cases} \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \end{cases}$$

Applichiamo le (5) tenendo presente che ora si ha $0 \leq -\alpha < \pi$:

$$\cos\,[\mathfrak{p} - (-\alpha)] = -\cos\,(-\alpha) = -\cos\,\alpha$$

$$\sin\,[\mathfrak{p} - (-\alpha)] = \sin\,(-\alpha) = -\sin\,\alpha$$

Possiamo concludere con le formule

$$\begin{cases} \cos\,(\mathfrak{p} + \alpha) = -\cos\alpha \\ \sin\,(\mathfrak{p} + \alpha) = -\sin\alpha \end{cases} \tag{6}$$

dove *occorre tenere presente che si è supposto*

$$-\mathfrak{p} < \alpha \leq 0$$

Queste formule sono facilmente interpretabili: *i numeri α e $\mathfrak{p} + \alpha$ sono coordinate angolari di due semirette fra loro opposte ed è ovvio che i valori delle funzioni circolari risultino opposti.*

Infine, una simmetria interessante è quella che scambia fra loro le semirette $\mathfrak{X}^+$ ed $\mathfrak{Y}^+$, cioè la simmetria che ha come asse la retta $y = x$. Essa manda il punto $P \leftrightarrow (x, y)$ nel punto $P' \leftrightarrow (y, x)$. Consideriamo dunque una semiretta $\mathfrak{R}$, di coordinata angolare α, che sta nel primo quadrante, cioè tale che $0 \leq \alpha \leq \frac{\mathfrak{p}}{2}$; essa viene trasformata in una semiretta $\mathfrak{R}'$, anch'essa interna al primo quadrante, di coordinata angolare α'. Si tratta di vedere come sono legate fra loro α ed α'. Si ha

$$\alpha = \angle(\mathfrak{X}^+, \mathfrak{R}) \quad , \quad \alpha' = \angle(\mathfrak{X}^+, \mathfrak{R}')$$

Essendo la nostra simmetria assiale un'isometria, si ha $\alpha = <(\mathfrak{X}^+, \mathfrak{R}) = <(\mathfrak{Y}^+, \mathfrak{R}')$, dal momento che $\mathfrak{X}^+$ viene trasformato in $\mathfrak{Y}^+$. D'altra parte, essendo la semiretta $\mathfrak{R}'$ interna all'angolo $(\mathfrak{X}^+, \mathfrak{Y}^+)$, si ha

$$\measuredangle (\mathfrak{X}^+ , \mathfrak{R}') + \measuredangle (\mathfrak{Y}^+ , \mathfrak{R}') = \frac{\pi}{2}$$

che si può scrivere

$$\alpha' + \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Sia P il punto rappresentativo della semiretta $\mathfrak{R}$ sul cerchio $\mathbf{U}$, e P' il punto rappresentativo della semiretta $\mathfrak{R}'$. Si ha

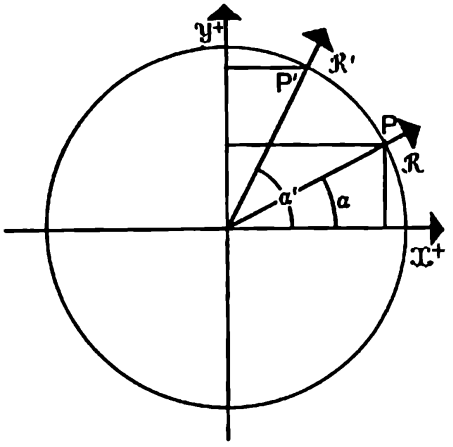


Fig. 12

$$P \leftrightarrow (\cos \alpha , \sin \alpha)$$
$$P' \leftrightarrow (\cos \alpha' , \sin \alpha') = (\sin \alpha , \cos \alpha)$$

Essendo $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$, si ha

$$\begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \\ \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \end{cases} \qquad (7)$$

Occorre tenere presente che queste formule *sono state dimostrate nell'ipotesi* $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. *Anche le formule* (5) *e* (6) *sono state stabilite sotto certe limitazioni per i valori* α. *Ma presto dimostreremo che tutte queste limitazioni possono essere tolte.*

Esercizi

1 Disponendo di una tavola che dà i valori delle funzioni circolari solo nell'intervallo $[0, 45°]$, dire come si potrebbe procedere per ricavare i seguenti valori di funzioni circolari: cos (— 80°), sin (— 80°), cos (— 120°), sin (— 120°), sin (— 162° 20′ 35″), sin (72° 32′).

2 Verificare che per ogni valore di α in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, si ha:

$(\cos \alpha)^4 - (\sin \alpha)^4 - (\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 0$

$(\sin \alpha)^4 + (\cos \alpha)^4 + 2 (\sin \alpha)^2 (\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2 - (\cos \alpha)^2 = 0$

3 Trovare i valori di α compresi fra 0 e 90° tali che $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$ (servirsi delle tavole per determinare i valori approssimati di α).

4 Trovare le soluzioni delle seguenti equazioni:

$(\cos x)^2 + \sin x = \frac{1}{4}$; $2 (\sin x)^2 - 5 \cos x - 4 = 0$

* **5** Dire se hanno soluzione le seguenti equazioni:

$(\cos x)^2 + \sin (3x) = 5$; $(\cos x)^4 + (\sin x)^4 = 1$

La retta in forma parametrica. La funzione tangente

22.3 Riprendiamo la nostra retta orientata $\mathcal{R}$ passante per l'origine del riferimento cartesiano e caratterizzata dalla coordinata angolare α, presa nell'intervallo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Indichiamo sempre con s la coordinata di un punto P di $\mathcal{R}$. Supponiamo che il punto P si muova con velocità v ($v \neq 0$) su $\mathcal{R}$, passando per l'origine per $t = 0$. La legge del moto è molto semplice (ne abbiamo già parlato piú volte):

$$s = vt \tag{8}$$

Domandiamoci ora: quali sono le coordinate cartesiane del punto P in funzione del tempo t?

Poiché si ha $\frac{x}{s} = \cos \alpha$ e $\frac{y}{s} = \sin \alpha$, risulta $x = s \cos \alpha$, $y = s \sin \alpha$, perciò, tenendo conto della (8),

$$\begin{cases} x = (v \cos \alpha)\, t \\ y = (v \sin \alpha)\, t \end{cases} \tag{9}$$

o anche

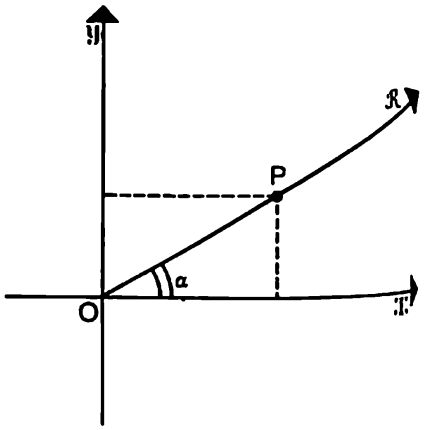


Fig. 13

$$\begin{cases} x = at \\ y = bt \end{cases} \tag{10}$$

avendo posto $a = v \cos \alpha$, $b = v \sin \alpha$. Questo sistema di equazioni ci fornisce un altro modo di rappresentare una retta passante per l'origine, oltre a quello che abbiamo conosciuto nel cap. 17; infatti è chiaro che se facciamo variare t su $\mathbf{R}$ il punto $P \leftrightarrow (x, y)$ descrive tutta la retta $\mathcal{R}$. Osserviamo poi che ogni sistema del tipo (10), dove a e b non sono entrambi nulli, rappresenta una retta. Infatti si possono sempre trovare (come abbiamo visto nel § 22.1) un numero α nell'intervallo $]-\pi, \pi]$ ed un numero positivo v, tali che

$$\frac{a}{v} = \cos \alpha \quad , \quad \frac{b}{v} = \sin \alpha$$

cioè

$$a = v \cos \alpha \quad , \quad b = v \sin \alpha$$

(Imporre che v sia positivo equivale ad imporre che $\mathcal{R}$ sia orientata nello stesso verso in cui si muove il punto P).

La variabile t che compare nella (9) e nella (10) è detta **parametro**; la (10) è detta **equazione parametrica** della retta.

Dal sistema (9) vogliamo ritrovare la solita equazione normale della retta; si tratta dunque di vedere quale legame fra x ed y sussiste in base al sistema (9). Supponiamo che la nostra retta non coincida con l'asse $\mathcal{Y}$, cioè che sia $\cos \alpha \neq 0$. Allora, dividendo membro a membro la seconda delle (9) per la prima, troviamo

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \tag{11}$$

Questa appunto è l'equazione normale di una retta di pendenza $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; ricordiamo che la pendenza coincide con l'ordinata del punto Q in cui la retta $\mathcal{R}$ (passante per l'origine) taglia la retta $x = 1$. Ora c'interessa mettere in evidenza il legame che c'è fra la coordinata angolare e la pendenza della retta $\mathcal{R}$; poniamo allora questa definizione:

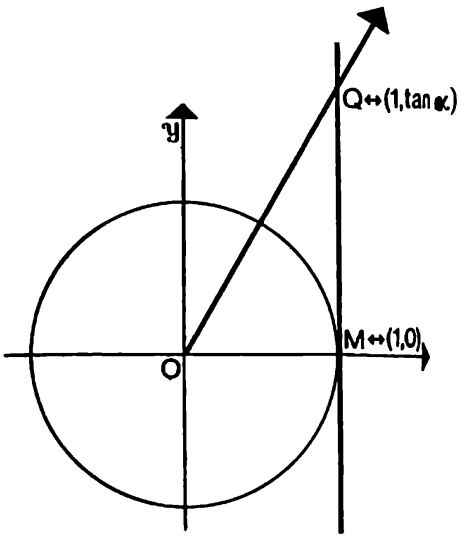


Fig. 14

la funzione

$$\alpha \longrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

si dice **tangente** *di* α *e si indica con il simbolo* $\tan \alpha$; *essa è definita nell'intervallo* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, *con esclusione dei punti* $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$, *per cui la funzione coseno si annulla.*

Il termine « tangente » è già stato usato con altro significato; il legame fra i significati sta nel fatto che il valore della funzione tangente è dato dalla misura (con segno) del segmento $[M, Q]$ che la retta $\mathcal{R}$ stacca sulla tangente al cerchio unitario **U** mandata dal punto M in cui questo interseca il semiasse $\mathfrak{X}^+$ (si veda ancora la figura 14). La funzione tangente non richiede uno studio a parte, essendo definita a partire dalle funzioni coseno e seno. Ci basta tracciare il grafico (vd. figura accanto). Naturalmente, anche le tavole della funzione tangente non sono essenziali, una volta che si possa disporre delle tavole delle funzioni coseno e seno.

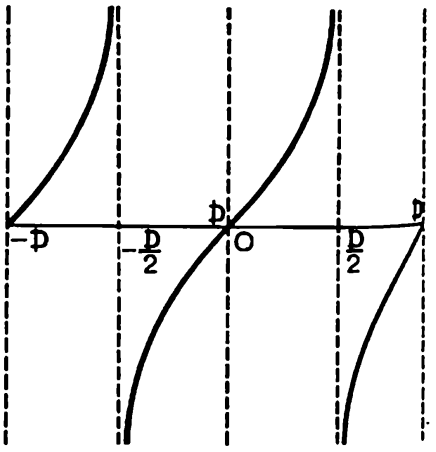


Fig. 15

Ritorniamo all'equazione parametrica della retta, per qualche ulteriore osservazione.

Anzitutto, è facile ottenere l'equazione parametrica di una retta qualunque (anche non passante per l'origine). Infatti, sia $\mathcal{R}$ una retta passante per il

punto $Q \leftrightarrow (h, k)$; sia $\mathcal{R}'$ la parallela ad $\mathcal{R}$ passante per l'origine. Se $\mathcal{R}'$ ha l'equazione parametrica

$$\begin{cases} x = at \\ y = bt \end{cases}$$

la retta $\mathcal{R}$ potrà essere rappresentata dal sistema

$$\begin{cases} x = at + h \\ y = bt + k \end{cases} \tag{12}$$

Infatti per ottenere $\mathcal{R}$ basta applicare ad $\mathcal{R}'$ una traslazione che porti l'origine in Q; osserviamo che nella rappresentazione (12) il punto Q si ottiene per il valore nullo del parametro t.

Vediamo ora come si può rappresentare un segmento di una retta $\mathcal{R}$. Anzitutto è evidente che, indicando con s la coordinata di un punto di $\mathcal{R}$ (rivedere l'assioma A5), un segmento di $\mathcal{R}$ è rappresentato dalla disequazione

$$s_1 \leq s \leq s_2$$

Passando al parametro t, tramite la (8), ricaviamo subito che il segmento è rappresentato dai valori di t tali che

$$t_1 \leq t \leq t_2$$

dove, se si suppone $v > 0$, si ha

$$t_1 = \frac{s_1}{v} \quad , \quad t_2 = \frac{s_2}{v}$$

Possiamo concludere che un segmento della retta rappresentata dal sistema (12) è l'immagine di un intervallo $t_1 \leq t \leq t_2$.

Esercizi

1 Dimostrare che la funzione $x \longrightarrow \tan x$ è crescente nell'intervallo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

2 Esprimere $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$ mediante $\tan \alpha$, supponendo $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

3 Dimostrare che, per ogni numero reale y, esiste un unico valore α in $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tale che $\tan \alpha = y$. (Tenere presente la definizione della tangente e il legame che sussiste fra coseno e seno).

4 Esprimere tan 18°, tan 30°, tan 45°, tan 60°, tan 72°.

5 Che relazione sussiste fra $\tan \alpha$ e $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, per $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$?

6 Siano assegnati nel piano due punti $P_1 \leftrightarrow (x_1, y_1)$, $P_2 \leftrightarrow (x_2, y_2)$. Dimostrare che il segmento $[P_1, P_2]$ si può rappresentare parametricamente così:

$$\begin{cases} x = x_1 t + x_2 (1 - t) \\ y = y_1 t + y_2 (1 - t) \end{cases} \qquad \text{con} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Il teorema del coseno e quello dei seni

22.4 Ora siamo in grado di risolvere vari problemi relativi al triangolo, in cui interviene — o fra i dati o fra le incognite — la misura degli angoli.

I - *Ricordiamo il primo criterio di congruenza dei triangoli: esso ci dice che un triangolo è determinato (a meno di isometrie) se sono assegnate le misure di due lati e dell'angolo da essi compreso. Possiamo allora proporci, in primo luogo, di calcolare la misura del terzo lato.*

Facciamo uso delle solite notazioni; indichiamo

con α, β, γ le misure degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ e con a, b, c le misure dei lati opposti ad A, B, C, rispettivamente. Supponiamo assegnati a, b, γ e proponiamoci di determinare c. Prendiamo un riferimento cartesiano in modo che l'origine coincida con il vertice C, il vertice B si trovi sul semiasse $\mathfrak{X}^+$ e il vertice A si trovi nel semipiano $y > 0$.

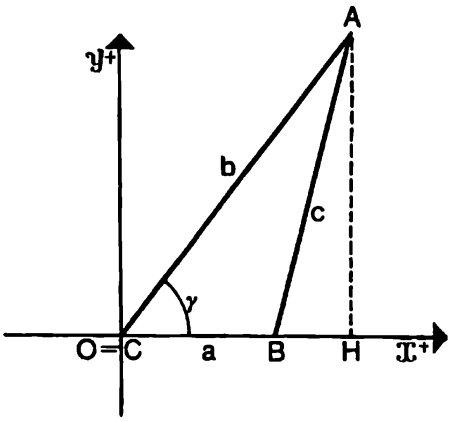


Fig. 16

In questo modo γ coincide con la coordinata angolare della semiretta OA.

Evidentemente si ha

$$B \leftrightarrow (a\,,\,0)\,,\quad A \leftrightarrow (b\,\cos\gamma\,,\,b\,\sin\gamma)$$

[Infatti, ricordiamo che, posto $A \leftrightarrow (x\,,\,y)$, si ha $\frac{x}{b} = \cos\gamma$, $\frac{y}{b} = \sin\gamma$, per la definizione stessa delle funzioni circolari]. Valutiamo la distanza $\overline{AB}$, anzi il suo quadrato:

$$c^2 = \overline{AB}^2 = (b\,\cos\gamma - a)^2 + (b\,\sin\gamma)^2 =$$
$$= b^2\,(\cos\gamma)^2 - 2ab\,\cos\gamma + a^2 + b^2\,(\sin\gamma)^2 =$$
$$= a^2 - 2ab\,\cos\gamma + b^2\,[(\cos\gamma)^2 + (\sin\gamma)^2]$$

da cui

$$c^2 = a^2 - 2ab\,\cos\gamma + b^2 \qquad (13)$$

Questa è la formula che cercavamo; essa è nota come **teorema del coseno (o teorema di Carnot)**.

Notiamo che nella formula che esprime c^2 i valori a e b entrano in modo simmetrico: cioè la formula rimane inalterata se si scambiano fra loro a e b (questo poteva essere facilmente previsto!). Inoltre è interessante notare che questa formula può essere considerata una generalizzazione del teo-

rema di Pitagora. Infatti nel caso in cui l'angolo $\widehat{C}$ sia retto, si ha $\cos \gamma = 0$ e risulta $c^2 = a^2 + b^2$, che è esattamente l'enunciato del teorema di Pitagora.

Applichiamo la formula (13) ad un problema di topografia. Si vuole valutare la distanza fra due punti A, B: non è possibile però misurarla direttamente (o con strumenti ottici) perché fra A e B vi è un ostacolo (ad es.: una collina). Vi è però un terzo punto C da cui tanto A che B sono visibili e accessibili. I dati rilevati sono questi:

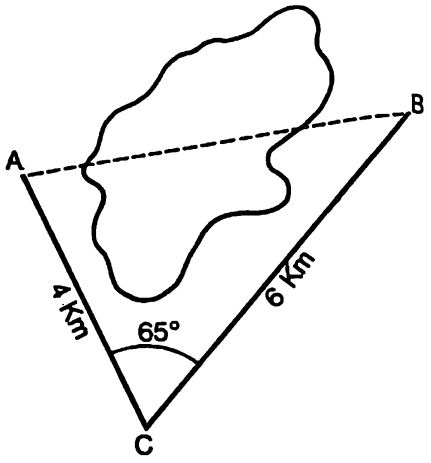


Fig. 17

$\overline{AC} = b = 4$ km

$\overline{BC} = a = 6$ km

$\measuredangle (\widehat{ACB}) = \gamma = 65°$

La formula (13) ci dà

$$\overline{AB} = c = \sqrt{4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos 65° + 6^2}$$

La nostra tavola ci fornisce il valore approssimato: $\cos 65° \simeq 0{,}423$. Si ricava (il lettore è invitato a rifare i calcoli e a controllare il risultato)

$$c \simeq \sqrt{52 - 20{,}30} \simeq \sqrt{31{,}70} \simeq 5{,}63$$

Dopo che, con la formula (13), abbiamo potuto determinare la lunghezza del terzo lato del triangolo ABC, è facile, mediante il teorema di Carnot, ricavare il coseno degli altri due angoli incogniti. Ad esempio, si ha, sostituendo nella formula (13) c con a, a con c e, naturalmente, γ con α

$$a^2 = c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2$$

da cui

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad (14)$$

Nel caso dell'esercizio numerico trattato, abbiamo

$$\cos \alpha \simeq \frac{4^2 + 31{,}70 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5{,}63} \simeq \frac{11{,}70}{45{,}04} \simeq 0{,}26$$

Consultando la tavola si ha $\alpha \simeq 75°$.

Nel corso di questo esercizio numerico abbiamo usato ripetutamente il segno di **uguaglianza approssimata** $\simeq$. È bene dire chiaramente che *questo simbolo non deve essere considerato come simbolo matematico*; infatti (per fare un esempio) non abbiamo nessuna definizione precisa che ci autorizzi a dire quale delle seguenti relazioni sia vera e quale falsa:

$$1 \simeq 1{,}001 \quad , \quad 1 \simeq 1{,}01 \quad , \quad 1 \simeq 1{,}1 \quad , \quad 1 \simeq 1{,}3$$

Tutto dipende dal problema pratico che consideriamo e dall'errore che siamo disposti a tollerare nei nostri calcoli. Ad esempio, il calcolo alla buona che abbiamo fatto qui sopra potrebbe essere troppo grezzo rispetto a certe esigenze.

Inoltre, se anche fissassimo un limite di precisione al di là del quale non è piú lecito l'uso del simbolo $\simeq$ (se, ad esempio, fissassimo che $a \simeq b$ si scrive solo quando $|a - b| \leq \frac{1}{1000}$), dovremmo tenere presente che *per la relazione* $\simeq$, comunque, *non vale la proprietà transitiva*. Infatti occorre tenere presente che sommando molti piccoli errori si può, dopo calcoli un po' lunghi, ottenere un risultato affetto da un grosso errore! Dunque, non conviene considerare il simbolo $\simeq$ come un simbolo matematico, ma come un simbolo che

acquista un significato dal tipo di problema pratico a cui si sta applicando il calcolo.

II - Proseguendo sulla via iniziata, *consideriamo il secondo criterio di congruenza dei triangoli: esso ci dice che un triangolo è determinato (a meno di isometrie) se sono assegnate le misure di un lato e dei due angoli ad esso adiacenti. Possiamo allora proporci di determinare gli elementi incogniti, cioè le misure degli altri due lati.* (Evidentemente, la misura del terzo angolo è subito determinata tenendo presente che la somma delle misure dei tre angoli è uguale alla misura dell'angolo piatto, $\pm$).

Arriviamo al risultato cercando di esprimere le altezze del triangolo in base alle misure dei lati e degli angoli. Supponiamo, ad esempio, di volere determinare h_A, cioè l'altezza mandata dal vertice A. Prendiamo un sistema di assi cartesiani esattamente come abbiamo fatto nel punto I (vd. fig. 16). Ricordiamo, in particolare, che γ è la coordinata angolare della semiretta passante per A; l'altezza h_A coincide con l'ordinata y del punto A; poiché $\frac{y}{b}$ è il rapporto di proiezione della semiretta OA sull'asse y, cioè il seno di γ, si ha

$$h_A = b \sin\gamma \qquad (15)$$

Ora viene il punto piú ingegnoso del nostro discorso.

Riflettiamo che le parti dei vertici B e C possono scambiarsi fra loro: cioè possiamo prendere un riferimento cartesiano che abbia origine in B, che contenga il punto C nel semiasse x^+ e tale che il punto A appartenga al semipiano $y > 0$. Insomma, tutto va come prima, con lo scambio di B con C e di β con γ. Allora vale la relazione analoga alla (15):

$$h_A = c \sin\beta \qquad (16)$$

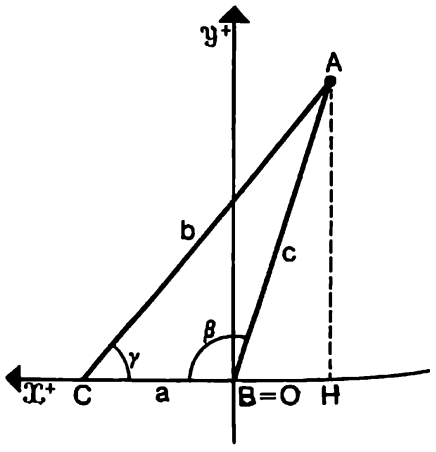


Fig. 18

Dalle relazioni (15) e (16) si deduce

$$b \sin \gamma = c \sin \beta$$

che si può scrivere, dividendo ambo i membri per $\sin \beta \sin \gamma$,

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \tag{17}$$

Questa relazione — teniamolo presente — è stata ottenuta mandando l'altezza dal vertice A. Mandando l'altezza dal vertice B, possiamo rifare punto per punto gli stessi ragionamenti; in sostanza le parti dei vertici A e B si scambiano; si rifaranno tutti i passaggi precedenti scambiando fra loro i simboli A e B, e, naturalmente, anche i simboli α e β, a e b ; troviamo cosí le relazioni

$$h_B = a \sin \gamma \quad , \quad h_B = c \sin \alpha$$

Uguagliando i secondi membri e dividendo per $\sin \alpha \sin \gamma$ otteniamo

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha} \tag{18}$$

Dalla (17) e dalla (18) si ottiene

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \tag{19}$$

Questa relazione è designata come **teorema dei seni.**

Ed ecco come il teorema dei seni ci permette di

risolvere il problema che ci eravamo proposti, partendo dal secondo criterio di congruenza dei triangoli. Supponiamo di conoscere c, α, β e di voler determinare gli altri elementi del triangolo. Anzitutto, come abbiamo osservato, γ è noto, essendo

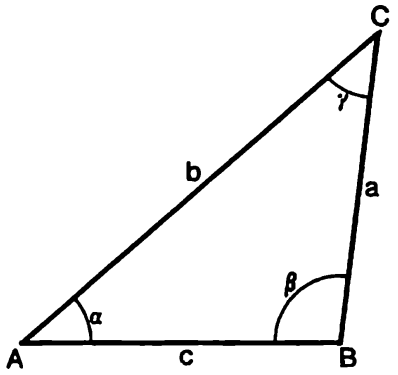


Fig. 19

$$\gamma = \sphericalangle - \alpha - \beta$$

Dalle (19) si ha allora

$$a = c\,\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = c\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad (20)$$

ricordando che $\sin(\sphericalangle - (\alpha+\beta)) = \sin(\alpha+\beta)$.

Analogamente si ha

$$b = c\,\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = c\,\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad (21)$$

Vediamo un esempio numerico, che possiamo ricavare ancora da un problema di topografia. Supponiamo che i punti A e B abbiano fra loro una distanza nota: $c = 5$ km; vogliamo trovare la distanza da A e da B di un terzo punto C servendoci solo di misure angolari fatte nei punti A e B. Ad esempio supponiamo di avere trovato le seguenti misure:

$$\alpha = \sphericalangle(\widehat{BAC}) = 40^\circ \quad , \quad \beta = \sphericalangle(\widehat{CBA}) = 98^\circ$$

Si ha $\gamma = 42^\circ$; $\sin\gamma \simeq 0{,}669$; $\sin\alpha \simeq 0{,}643$; $\sin\beta = \sin(180^\circ - 98^\circ) = \sin 82^\circ \simeq 0{,}990$.

Dalle (20) e (21) allora si ricava (in km)

$$a \simeq 5\,\frac{0{,}643}{0{,}669} \simeq 4{,}80\ , \quad b \simeq 5\,\frac{0{,}990}{0{,}669} \simeq 7{,}40$$

III - *Il terzo criterio di congruenza dei triangoli ci dice che un triangolo è determinato (a meno di isometrie) quando siano assegnate le lunghezze dei lati; si tratta dunque di determinare gli angoli.*

Questo è un problema che abbiamo già risolto: basta tenere presente la formula (14) che discende dal teorema di Carnot.

Esercizi

1 Scrivere esplicitamente le altre due formule analoghe alla (13).

2 Calcolare gli elementi incogniti di un triangolo di cui siano assegnati i seguenti dati:

$a = 35$ cm , $b = 72$ cm , $\gamma = 112°$

$\alpha = 32°$, $\beta = 74°$, $c = 25$ cm

(Servirsi con un po' di buon senso della tavola riportata alla fine del capitolo).

3 Sono assegnate due forze: ***f***, ***g*** con intensità, rispettivamente, di 10 kg a 7 kg; l'angolo formato dalle loro direzioni è di 112°. Trovare l'intensità delle risultante e l'ampiezza dell'angolo che essa forma con la forza di intensità minore. (Fare anche un disegno e servirsene per una grossolana verifica del calcolo).

4 I lati di un parallelepipedo rettangolo misurano 8 cm, 9 cm, 12 cm; calcolare con l'approssimazione consentita dalla tavola, l'ampiezza dell'angolo che la diagonale mandata da un vertice fa con ciascuno dei tre spigoli concorrenti al vertice.

* **5** Come abbiamo visto nella dimostrazione del teorema dei seni, il rapporto fra la misura di un lato e il seno dell'angolo opposto non dipende dal lato considerato [cfr. le (19)]. Che significato geometrico può avere questo rapporto? (Fissato un lato, di lunghezza a, domandiamoci: come è fatto l'insieme dei triangoli per cui $\dfrac{a}{\sin \alpha}$ è costante?).

* **6** Ritorniamo all'esempio del lago circolare in mezzo alla pianura (§ 13.1). Supponiamo che il raggio sia di 2 km; indichiamo con O il centro. Due punti A e B sono allineati con O, da parti opposte di O, e distanti, rispettivamente, 5 km e 3 km da O. Calcolare (con l'approssimazione un po' grossolana consentita dalla nostra tavola) la lunghezza del minimo cammino fra A e B che non attraversa il lago.

7 Calcolare l'angolo diedro formato da due facce adiacenti di un tetraedro tegolare. (Come si sa dalla scuola media, l'angolo diedro è quello che si ottiene ragliando due facce adiacenti con un piano perpendicolare allo spigolo comune: si dimostra che l'ampiezza di quest'angolo non dipende dal piano perpendicolare scelto).

8 Due punti P, Q hanno fra loro una distanza d; il punto Q si sposta di una distanza non superiore ad r (con $r < d$) raggiungendo un punto Q'. Come si può valutare la massima ampiezza possibile dell'angolo $\widehat{QPQ'}$?

Qualora si disponga di una piccola calcolatrice programmabile:

9 Eseguire un programma che risolva il primo dei problemi considerati in questo § (cioè: programmare il calcolo di c, dati a, b, γ).

10 Eseguire un programma che fornisca le misure dei tre angoli di un triangolo, noti i tre lati.

La geometria e l'astronomia

22.5 Abbiamo detto, all'inizio del nostro studio della geometria (§ 13.2), che questa scienza si occupa delle proprietà piú semplici e piú profonde dell'ambiente che ci circonda.

Ora, dopo averla studiata in modo già abbastanza ampio al suo interno, ci proponiamo di vedere come essa possa essere concretamente applicata allo studio della realtà esterna; otterremo risultati di grande interesse, che non sarebbero certamente raggiungibili senza il suo aiuto. Naturalmente, perché abbia senso questo confronto con la realtà, occorre che diamo un'interpretazione fisica agli enti studiati in geometria. Noi supponiamo che gli oggetti abbastanza piccoli abbiano il ruolo di punti, i raggi luminosi il ruolo di rette, che gli spostamenti dei corpi rigidi siano rappresentati da isometrie.

Finché riscontreremo (come effettivamente si riscontra) che i risultati previsti sono in buon accordo con le misure sperimentali, potremo concludere che la nostra geometria è uno schema efficace per descrivere la *posizione* degli oggetti che ci circondano. Non pretendiamo ancora di studiare il *moto* degli oggetti, perché questo è

un compito successivo, piú difficile, che riguarda la *meccanica.*

In questo paragrafo vedremo come, seguendo gli antichi, è possibile ottenere informazioni sulle dimensioni della Terra e sulle reciproche distanze degli astri, partendo da misure molto grossolane e sviluppando alcuni ragionamenti geometrici.

Eratostene e il raggio della Terra

I - Sappiamo che la Terra è (approssimativamente) sferica: questa è un'acquisizione abbastanza spontanea, specialmente per chi naviga. Infatti, sul mare gli oggetti lontani sono nascosti dall'orizzonte e si rendono visibili gradualmente, man mano che essi si avvicinano a noi. Gli antichi si convinsero della sfericità della Terra con una prova di notevole evidenza: durante un'eclissi di Luna, l'ombra della Terra, che viene proiettata sulla Luna come su un gigantesco schermo cinematografico, ha i bordi curvi in modo molto regolare. Ed ecco come Eratostene * calcolò le dimensioni della Terra.

Egli osservò che nel solstizio d'estate, cioè quando nell'emisfero boreale il Sole raggiunge la sua massima elevazione, nella città di Siene (Assuan) a mezzogiorno, i suoi raggi erano pressoché verticali (il Sole si specchiava nel fondo dei pozzi). Nello stesso giorno, ad Alessandria, a mezzogiorno, i raggi del Sole non erano verticali, ma formavano con la verticale un angolo di circa 7° 12′ (7 gradi e 12 primi, cioè sessantesimi di grado; nella figura per maggiore evidenza, questa ampiezza è stata esagerata). Eratostene conosceva, sia pure con valutazione grossolana (forse mediante il computo delle giornate di cammino) la distanza fra Siene ed Alessandria. Non siamo in grado di valutare

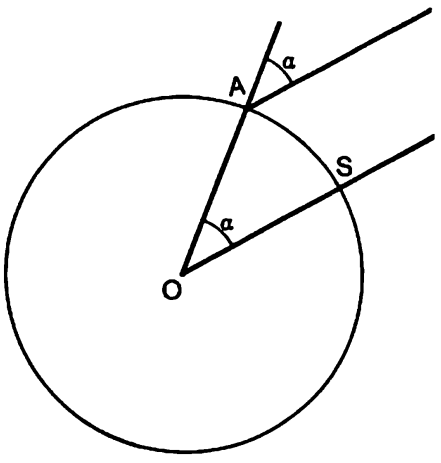


Fig. 20

* Eratostene, vissuto tra il 275 e 195 (circa) a. C., fu matematico e astronomo, oltre che filologo e poeta. (Lo abbiamo già incontrato in aritmetica, a proposito del « crivello »). Egli visse in quell'ambiente di straordinario livello scientifico che fu Alessandria nel periodo ellenistico e fu direttore della celebre biblioteca di quella città.

la bontà della sua misura poiché non ci è noto con precisione l'equivalente dello «stadio», l'unità di misura da lui impiegata.

Accettiamo comunque il valore di 785 km per la distanza fra queste città.

A questo punto, dobbiamo enunciare tre ipotesi implicite nel ragionamento di Eratostene:

a) in ogni punto della superficie della Terra la verticale (ottenuta mediante il filo a piombo) è diretta verso il centro della Terra;

b) la distanza fra la Terra e il Sole è molto grande, rispetto alle dimensioni della Terra; perciò i raggi del Sole che colpiscono i diversi punti della Terra si possono ritenere fra loro paralleli;

c) Alessandria si trova esattamente a nord di Siene, cosicché il mezzogiorno è simultaneo per le due località.

Pensiamo di tagliare la Terra con un piano che passa per il suo centro O, che contiene i punti S (Siene), A (Alessandria) ed anche, ovviamente, il Sole. (Fig. 20).

Allora risulta chiaro che l'angolo del raggio del Sole con la verticale nel punto A (Alessandria) ha la stessa ampiezza dell'angolo $\widehat{SOA}$. (Riflettere alla traslazione che manda il punto A nel punto O).

Domandiamoci ora: la lunghezza dell'arco fra A ed S (cioè la lunghezza del cammino fra Alessandria e Siene), quale frazione rappresenta della lunghezza dell'intera circonferenza?

$$\frac{785}{x} = \frac{7 + \frac{1}{5}}{360} = \frac{\frac{36}{5}}{360} = \frac{1}{50}$$

da cui

$x = 785 \cdot 50 = 39\,250$

valore notevolmente approssimato al valore oggi noto (circa 40 000 km).

La distanza della Luna

II - La misura del raggio terrestre ci fornisce il punto di partenza per determinare le distanze dei corpi celesti, a cominciare dalla Luna. Riprendiamo lo schema di Eratostene, supponendo che ora si osservi un punto L della Luna da due punti A, S della Terra, abbastanza distanti fra loro. Per semplicità supponiamo che il punto L si trovi esattamente sulla verticale di S. Indicando le ampiezze degli angoli come in figura, si ha $\alpha = \beta + \gamma$. Infatti, sommando le ampiezze degli angoli interni del triangolo AOL si ottiene

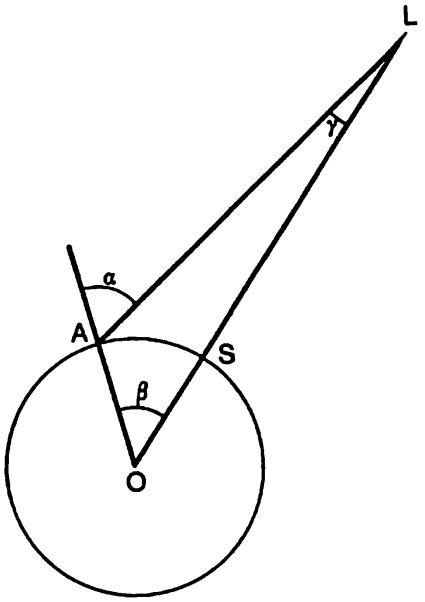


Fig. 21

$$\beta + \gamma + (\sharp - \alpha) = \sharp$$

da cui

$$\beta + \gamma - \alpha = 0$$

Possiamo ritenere noto β, per il fatto che A ed S sono punti noti sulla Terra *.

Dunque l'angolo

$$\gamma = \alpha - \beta$$

è noto. Allora, tenendo conto che

$$\sin \alpha = \sin (\sharp - \alpha)$$

dal teorema dei seni ricaviamo, detta R la misura del raggio terrestre,

* L'angolo β può essere determinato utilizzando il Sole, con il metodo di Eratostene, oppure, piú comodamente, utilizzando una «stella fissa». (Le stelle fisse hanno una distanza enorme dalla Terra, e i raggi che vengono da esse si possono considerare paralleli).

$$\frac{R}{\sin\gamma} = \frac{\overline{OL}}{\sin\alpha}$$

da cui

$$\overline{OL} = R\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} \qquad (22)$$

Conoscendo il valore di R, e quelli di α e di β, si trova facilmente il valore di $\overline{OL}$.

Al giorno d'oggi si dispone di tecniche raffinate e precise per misurare la distanza Terra-Luna. L'orbita della Luna attorno alla Terra è solo approssimativamente circolare; in realtà la distanza fra la Terra e la Luna è variabile. La distanza media (da centro a centro) è di 384 000 km.

Il Sole e i pianeti

È molto piú difficile valutare la distanza fra la Terra e il Sole; però i Greci affrontarono anche questo problema.

È interessante vedere come Aristarco di Samo, un astronomo veramente geniale, riuscí a dare una prima valutazione grossolana ma estremamente importante, della distanza Terra-Sole.

Anzitutto, i Greci si resero conto chiaramente che la Luna viene illuminata dal Sole e ne riflette la luce; l'osservazione piú immediata mette in evidenza che il Sole illumina costantemente una metà esatta della Luna, anche se la faccia illuminata non è sempre visibile dalla Terra e piú spesso è visibile solo in parte.

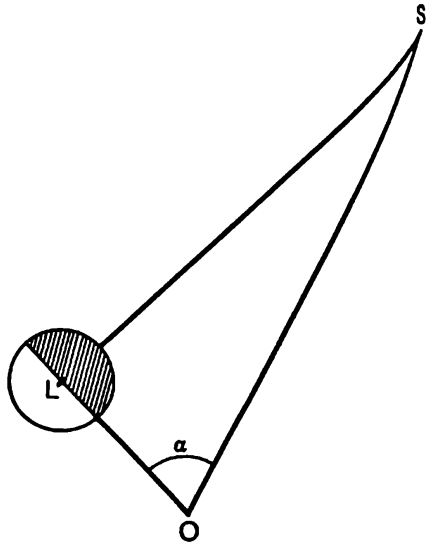


Fig. 22

Supponiamo ora che un osservatore O, sulla Terra, veda, in un certo istante, una metà esatta della faccia della Luna illuminata. Evidentemente, in quella situazione, *la retta OL che congiunge O con il centro della Luna risulta perpendicolare alla retta LS che congiunge il centro della Luna con il centro del Sole*. Supponiamo che da O sia visibile

S; allora si potrà valutare l'ampiezza α dell'angolo $\widehat{SOL}$.

Vale dunque la relazione

$$\overline{OL} = \overline{OS} \cos \alpha$$

Poiché $\overline{OL}$ è noto, si può ricavare $\overline{OS}$:

$$\overline{OS} = \frac{\overline{OL}}{\cos \alpha} \qquad (23)$$

Le misure ci dànno per α un valore molto vicino a 90°; Aristarco credeva di poter affermare che è $\alpha = 87°$; in realtà è $\alpha = 89° 50'$ circa.

Prendendo $\overline{OL} = 384\,000$ km, la formula (23) ci dà, con un semplice calcolo $\overline{OS} = 132\,000\,000$ km. Comunque Aristarco non sbagliò affermando che la distanza della Terra dal Sole è molto maggiore della distanza della Terra dalla Luna *.

A questo punto, sulla base di misure angolari, è possibile determinare la posizione dei vari pianeti del sistema solare.

L'argomento è troppo complesso per essere trattato in poche battute; scegliamo un problema particolarmente semplice: la determinazione della distanza Venere-Sole. Ammettiamo questa ipotesi, accettabile in una prima grossolana approssimazione: che la Terra e Venere si muovano in uno stesso piano che passa per il Sole e descrivano orbite circolari.

* Poiché il disco del Sole, dalla Terra, appare della stessa ampiezza angolare di quello della Luna, Aristarco ne dedusse che il Sole doveva essere immensamente piú grande della Luna ed anche della Terra. Da queste valutazioni, pur cosí grossolane, Aristarco dedusse che era ragionevole pensare che il Sole, corpo di mole maggiore, dovesse essere fermo e la Terra, con la Luna e gli altri pianeti, dovessero ruotargli attorno. Queste tesi furono però respinte dagli scienziati dell'antichità e furono riprese, dopo parecchi secoli, da Copernico che ne fece il fondamento della nuova scienza.

Eseguendo numerose osservazioni, noi troviamo che l'angolo fra Venere e il Sole è variabile e raggiunge un valore massimo di circa 46°. Che cosa possiamo dedurre? Possiamo, ragionevolmente, ritenere che quando l'angolo (Venere, Sole) raggiunge il suo valore massimo, la retta TV risulti tangente all'orbita di Venere. Dunque, in questa situazione, la retta TV e la retta VS sono perpendicolari.

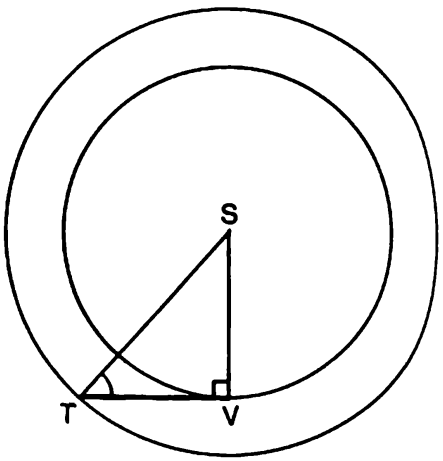


Fig. 23

Concludiamo:

$$\overline{VS} \simeq \overline{TS} \sin 46° \simeq \overline{TS}\ 0{,}72$$

La distanza $\overline{TS}$ (Terra-Sole) è detta **unità astronomica**; dunque abbiamo calcolato il raggio dell'orbita di Venere in unità astronomiche.

Mercurio e Venere hanno distanza dal Sole minore di quella della Terra e sono detti pianeti **interni**; Marte, Giove, Saturno, Urano, Nettuno, Plutone hanno distanza maggiore e sono detti pianeti **esterni**.

Esercizi

1 Sia A un punto della superficie della Terra e P un punto sulla verticale di A, ad un'altezza h. Esprimere mediante una formula la distanza di P dall'orizzonte (cioè dai punti piú lontani ancora visibili da P). (Si indichi con R la misura del raggio terrestre, si supponga la Terra perfettamente sferica).

2 Nell'esercizio precedente si prenda, successivamente, $h = 1$ km, $h = 10$ km, $h = 100$ km; si faccia il calcolo approssimato della distanza (*lungo la superficie terrestre*) da A *all'orizzonte di* P. (Assumere: $R = 6366$ km; detto O il centro della Terra e Q un punto dell'orizzonte, occorrerà considerare l'angolo $A\widehat{O}Q$. *Per una maggiore precisione di calcolo è opportuno calcolare il seno, anziché il coseno di questo angolo*).

* **3** Sia α l'ampiezza dell'angolo che, rispetto ad un osservatore O posto sulla Terra, la Luna fa con il Sole. Determinare, quale frazione della Luna, approssimativamente, si vede illuminata. (Considerare paralleli i raggi del Sole che arrivano alla Terra e alla Luna e considerare le dimensioni della Luna trascurabili rispetto alla distanza Terra-Luna).

* **4** Supponiamo che, ad un certo tempo, Venere faccia un angolo di 25° con il Sole. Calcolare (sempre nei limiti della nostra grossolana approssimazione) la

distanza Terra-Venere. (Si troveranno due valori possibili: disponendo di un cannocchiale sarà possibile decidere quale dei due è quello vero?).

Le funzioni periodiche. Il prolungamento delle funzioni circolari

22.6 La nostra esperienza quotidiana ci presenta molti fenomeni che hanno andamento periodico, cioè che si ripetono ad intervalli di tempo costanti. Ad esempio, l'andamento delle stagioni, in tutti i suoi aspetti piú salienti, è un fenomeno periodico con periodo di un anno: questo ripetersi ciclico è legato al moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole. La tecnologia ci offre molti esempi di fenomeni periodici; ad esempio, in un motore a scoppio che funzioni a regime costante la temperatura e la pressione all'interno di ogni cilindro hanno andamento periodico. Anche fra i fenomeni biologici se ne trovano molti periodici: ad esempio il nostro cuore, in situazione di riposo (e di buona salute), ha un funzionamento periodico. Questo funzionamento può essere messo in evidenza attraverso lo studio di certi potenziali elettrici; il grafico che si ottiene, attraverso speciali apparecchi di misura, si chiama elettrocardiogramma. (Vd. fig. 24)

Fig. 24

Dopo questi esempi, cerchiamo una definizione precisa.

Una funzione f avente come dominio e come codominio la retta reale **R** *si dice* **periodica** *di* **periodo** h $(h \neq 0)$ *se per ogni numero reale* x *si ha*

$$f(x + h) = f(x) \qquad (24)$$

Questa uguaglianza ci dice appunto che, ad intervalli di h, i valori di f si ripetono tali quali.

Naturalmente, poiché la (24) vale per ogni x, è lecito sostituire $x + h$ ad x; si ha allora

$$f(x + 2h) = f(x + h)$$

Da questa e dalla (24) si ottiene

$$f(x + 2h) = f(x) \qquad (25)$$

Perciò, se f è periodica con periodo h, essa è anche periodica con periodo $2h$; in modo analogo si può dimostrare che essa è periodica di periodo $3h$, $4h$, ... ed anche di periodo $-h$, $-2h$, ... (Per esercizio dimostrare queste ultime affermazioni). Quando si parla del *periodo* di una funzione, di solito si intende designare il piú piccolo dei suoi periodi positivi.

Nella definizione di funzione periodica non è essenziale supporre che il codominio sia la retta reale: può essere un insieme qualsiasi. Ad esempio, quando diciamo che il moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole è periodico intendiamo affermare la periodicità della funzione che ad ogni tempo t fa corrispondere la posizione assunta dalla Terra in quel preciso istante. Si tratta dunque di una funzione che ha come dominio la retta reale e come codominio lo spazio ordinario (o un piano, se pensiamo di sapere già che, nel suo moto attorno al Sole, la Terra sta, approssimativamente, su un piano fisso).

Ritornando, per semplicità, ad occuparci di funzioni a codominio reale, ci chiediamo spontaneamente: come si ripercuote sul grafico la periodicità di una funzione f? L'esame della figura ci porta a questa affermazione:

Se f è una funzione periodica di periodo h, il suo grafico viene trasformato in sé da una traslazione di intensità h in direzione dell'asse $\mathfrak{X}$.

Diamo una dimostrazione precisa: se è $f(x) = y$ ciò significa che il punto (x, y) appartiene al grafico di f. D'altra parte, nella nostra ipotesi, si ha anche $f(x + h) = y$, cioè anche il punto $(x + h, y)$ appartiene al grafico. Quindi la traslazione

$$\begin{cases} x' = x + h \\ y' = y \end{cases} \qquad (26)$$

porta un qualsiasi punto del grafico in un altro punto che appartiene pure al grafico. La nostra traslazione è appunto di ampiezza h e diretta secondo l'asse $\mathfrak{X}$.

Tutto questo discorso si può invertire: se il grafico di f è trasformato in sé dalla traslazione (26), f è periodica di periodo h.

Questa interpretazione geometrica della periodicità ci rende molto facile la risoluzione del seguente problema:

Data una funzione f definita in un intervallo $]a, b]$ di ampiezza $b - a = h$, costruire una funzione f^* definita su tutta la retta reale, che sia periodica di periodo h e che coincida con f nell'intervallo $]a, b]$. (Si può anche dire che f^* è un **prolungamento** di f **per periodicità** a tutta la retta reale).

La funzione f^* è subito costruita attraverso il suo grafico.

Basta fare compiere al grafico di f una traslazione in direzione dell'asse $\mathfrak{X}$ di ampiezza $h, 2h, 3h, \ldots$ e di ampiezza $-h, -2h, -3h, \ldots$

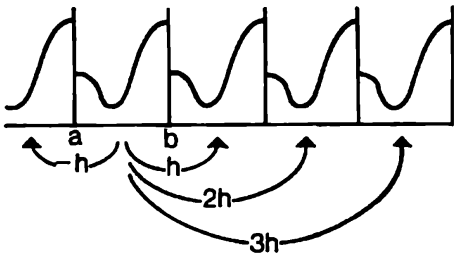


Fig. 25

Gli intervalli che si ottengono dall'intervallo $]a, b]$ con queste traslazioni (tra cui includeremo anche la traslazione nulla) riempiono senza sovrapposizioni tutta la retta reale; l'insieme che si ottiene, attraverso tutte queste traslazioni, dal grafico di f è il grafico di una funzione f^* definita su tutta la retta reale e periodica di periodo h.

Comprendiamo anche il motivo per cui abbiamo preso un intervallo $]a, b]$ che include uno solo dei suoi estremi. Se fossimo partiti da un intervallo $]a, b]$, nel nostro procedimento di trasla-

zione ci sarebbero state sovrapposizioni e il nostro procedimento sarebbe stato compatibile solo nell'ipotesi $f(a) = f(b)$.

Ritorniamo alle funzioni circolari, che abbiamo definito nel § 22.1. I numeri $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$, rispettivamente, rappresentano l'ascissa e l'ordinata del punto del cerchio **U** che ha coordinata angolare uguale ad α.

Per dare un'interpretazione dinamica alla nostra definizione, possiamo pensare ad un punto P che percorra tutto il cerchio unitario, in modo che α percorra, sempre crescendo, l'intervallo $]-\pi, \pi]$; pensando che il punto si muova in modo uniforme, possiamo ritenere α proporzionale al tempo t; anzi possiamo, assumendo una opportuna unità di misura per il tempo, supporre che sia $\alpha = t$.

A questo punto, una volta descritto un giro, è naturale pensare che P descriva un secondo giro, del tutto identico al primo, con α che varia da π a 3π; poi un terzo giro, ecc.

Tutte queste considerazioni ci conducono a completare la definizione delle funzioni circolari:

D'ora in poi riterremo definite le funzioni coseno e seno su tutta la retta reale, in modo che esse risultino periodiche con periodo 2π.

Per quello che abbiamo visto sopra, il prolungamento delle funzioni coseno e seno a tutta la retta reale è possibile e si compie in un unico modo.

A questo punto sorge spontanea una domanda: le funzioni coseno e seno così estese conservano le proprietà che abbiamo trovato? È facile vedere che la relazione (1):

$$(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$$

si conserva nel prolungamento per periodicità.

Occorre un po' piú di lavoro per dimostrare che valgono per ogni valore di α le relazioni (4), (5), (6), (7).

Dimostriamo la prima delle (4); sia α un numero reale qualsiasi: esso appartiene certamente ad uno di quegl'intervalli che abbiamo ottenuto dall'intervallo $]-\pi, \pi]$ sottoponendolo ad una traslazione di un multiplo di 2π, dunque, possiamo trovare un numero reale $\bar{\alpha}$ nell'intervallo $]-\pi, \pi]$ tale che

$$\alpha = \bar{\alpha} + k2\pi \qquad (27)$$

essendo k un intero relativo. Allora si ha $\cos \alpha = \cos \bar{\alpha}$; d'altra parte, prendendo gli opposti di ambo i membri della (27), si ha

$$-\alpha = -\bar{\alpha} + (-k)2\pi$$

perciò $\cos(-\alpha) = \cos(-\bar{\alpha})$. Ora, $\bar{\alpha}$ appartiene all'intervallo $]-\pi, \pi]$ in cui le (4) sono state già dimostrate; dunque è $\cos \bar{\alpha} = \cos(-\bar{\alpha})$; dalle uguaglianze stabilite si deduce che

$\cos \alpha = \cos(-\alpha)$ ■

Le altre formule si dimostrano tutte con ragionamenti dello stesso tipo: cioè associando ad un α arbitrario un valore $\bar{\alpha}$ opportuno che rientri nell'intervallo in cui la formula è già stata verificata.

Vocaboli e simboli

Coordinata angolare di una retta orientata
$\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\tan \alpha$ (coseno, seno, tangente): **funzioni circolari**
coordinate polari nel piano
equazione parametrica della retta

$x \simeq y$: indica un'**uguaglianza approssimata**, con significato dipendente dal contesto
funzione periodica; **periodo** (minimo)
prolungamento per periodicità di una funzione
funzione **crescente**, funzione **decrescente**.

Esercizi

1 Dato un numero reale x, si indica con $[x]$ la «parte intera» di x, cioè il massimo intero relativo che è $\leq x$. Ad esempio, $[\sqrt{2}] = 1$, $[7{,}32] = 7$. Si dimostri che la funzione $x \longrightarrow x - [x]$ (che è detta «mantissa») è periodica. Fare un grafico della mantissa di x.

2 Siano f e g funzioni aventi come dominio e come codominio la retta reale. Se g è periodica, anche $f \circ g$ è periodica.

3 Due ciclisti percorrono una pista lunga 1 km nello stesso senso. Essi partono assieme; dopo 6 giri esatti il secondo ciclista «doppia» il primo. Quale è il rapporto fra le velocità dei due ciclisti?

4 Problema precedente, con una variante: il secondo ciclista «doppia» il primo dopo 5 giri e 300 metri.

5 Il pianeta Marte, come tutti i pianeti «esterni», ha un periodo di rivoluzione maggiore di quello della Terra; esso gira attorno al Sole nello stesso senso della Terra e rimanendo (approssimativamente) nello stesso piano. Supponiamo che all'istante iniziale Marte, Terra e Sole siano allineati; l'osservazione ci dice che essi sono nuovamente allineati dopo 780 giorni. Quale è la durata della rivoluzione di Marte? (Si assuma la durata della rivoluzione terrestre uguale a 365 giorni; si supponga che i pianeti descrivano cerchi, con velocità angolare costante).

** **6** Supponiamo che il grafico di una funzione f, avente come dominio e come codominio la retta reale, venga trasformato in sé da una traslazione (non necessariamente parallela all'asse $\mathfrak{X}$): $x' = x + h$, $y' = y + k$. Che cosa si può dire di f?

7 Dimostrare la seconda delle (4) per ogni numero reale α.

* **8** Dimostrare le (5) e (6) per ogni numero reale α.

* **9** Dimostrare le (7) per ogni numero reale α.

TAVOLE DEL SENO E DEL COSENO

Queste tavole forniscono i valori *arrotondati* con tre cifre decimali (cioè forniscono il numero con tre cifre decimali piú vicino al valore esatto, per eccesso o per difetto).

angolo (in gradi)	seno	coseno	angolo (in gradi)	seno	coseno
1	0.017	1.000	46	0.719	0.695
2	0.035	0.999	47	0.731	0.682
3	0.052	0.999	48	0.743	0.669
4	0.070	0.998	49	0.755	0.656
5	0.087	0.996	50	0.766	0.643
6	0.105	0.995	51	0.777	0.629
7	0.122	0.993	52	0.788	0.616
8	0.139	0.990	53	0.799	0.602
9	0.156	0.988	54	0.809	0.588
10	0.174	0.985	55	0.819	0.574
11	0.191	0.982	56	0.829	0.559
12	0.208	0.978	57	0.839	0.545
13	0.225	0.974	58	0.848	0.530
14	0.242	0.970	59	0.857	0.515
15	0.259	0.966	60	0.866	0.500
16	0.276	0.961	61	0.875	0.485
17	0.292	0.956	62	0.883	0.469
18	0.309	0.951	63	0.891	0.454
19	0.326	0.946	64	0.899	0.438
20	0.342	0.940	65	0.906	0.423
21	0.358	0.934	66	0.914	0.407
22	0.375	0.927	67	0.921	0.391
23	0.391	0.921	68	0.927	0.375
24	0.407	0.914	69	0.934	0.358
25	0.423	0.906	70	0.940	0.342
26	0.438	0.899	71	0.946	0.326
27	0.454	0.891	72	0.951	0.309
28	0.469	0.883	73	0.956	0.292
29	0.485	0.875	74	0.961	0.276
30	0.500	0.866	75	0.966	0.259
31	0.515	0.857	76	0.970	0.242
32	0.530	0.848	77	0.974	0.225
33	0.545	0.839	78	0.978	0.208
34	0.559	0.829	79	0.982	0.191
35	0.574	0.819	80	0.985	0.174
36	0.588	0.809	81	0.988	0.156
37	0.602	0.799	82	0.990	0.139
38	0.616	0.788	83	0.993	0.122
39	0.629	0.777	84	0.995	0.105
40	0.643	0.766	85	0.996	0.087
41	0.656	0.755	86	0.998	0.070
42	0.669	0.743	87	0.999	0.052
43	0.682	0.731	88	0.999	0.035
44	0.695	0.719	89	1.000	0.017
45	0.707	0.707			

23

I polinomi

23.1 La nozione di polinomio è stata introdotta nel cap. 9 ed è stata poi utilizzata in vari casi particolari (a proposito dell'equazione del cerchio, ecc.). Ora è il momento di ritornare sull'argomento per approfondirlo, giovandoci anche delle conoscenze algebriche che abbiamo acquisito, soprattutto nel cap. 19. Il nostro obiettivo principale sarà lo studio delle proprietà algebriche che i polinomi possiedono.

I polinomi: riesame della definizione

Ripartiamo dunque dalla definizione di **polinomio sul corpo razionale Q**. Questa definizione viene data in due tempi:

a) *Si dicono* **espressioni atomiche** *le espressioni formate da un solo elemento di* **Q**, *oppure da una sola lettera* (*che è detta* **variabile**), *come*:

$$0,\ 1,\ \frac{3}{5},\ x,\ y,\ z,\ \ldots$$

b) *Si chiamano* **polinomi** *tutte le espressioni costruite a partire dalle espressioni atomiche mediante operazioni di addizione, di « opposto » e di moltiplicazione.* (Non è invece ammessa l'operazione di « reciproco »).

La parola-chiave di questa definizione è « espressione », termine che indica una successione di segni scritti secondo certe regole: nel nostro caso le regole si riducono a quelle — ben note — che

governano l'uso delle parentesi in matematica. Lo scopo delle parentesi, come abbiamo visto nel cap. 9, è quello di stabilire le precedenze nell'esecuzione delle varie operazioni.

Ad esempio, la seguente espressione:

$$\frac{1}{2}(xy + x + y) \cdot \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2\right)$$

è un polinomio su $\mathbf{Q}$, nelle variabili x ed y.

A questo punto, diamo le « regole di calcolo » (che è detto calcolo letterale, o formale). Queste regole consistono nel considerare uguali due polinomi che siano ottenuti l'uno dall'altro mediante l'applicazione, anche ripetuta, delle seguenti relazioni*:

1) $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C} = \mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C})$ (*proprietà associativa dell'addizione*)

2) $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{B} + \mathcal{A}$ (*proprietà commutativa dell'addizione*)

3) $\mathcal{A} + 0 = \mathcal{A}$ (*lo zero è l'elemento neutro per l'addizione*)

4) $\mathcal{A} + (-\mathcal{A}) = 0$ (*proprietà caratteristica dell'« opposto »*)

5) $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C})$ (*proprietà associativa della moltiplicazione*)

6) $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$ (*proprietà commutativa della moltiplicazione*)

7) $\mathcal{A} \cdot 1 = \mathcal{A}$ (*l'unità è l'elemento neutro per la moltiplicazione*)

9) $\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C}$ (*proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione*).

* Dove $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sono espressioni qualunque, 0 è l'espressione nulla, 1 è l'espressione unità.

Come si vede, sono le stesse proprietà che abbiamo elencato nel cap. 8 (per i numeri razionali) e ripreso in forma generale nel cap. 19: manca solamente la proprietà che riguarda il « reciproco », dal momento che questa operazione non è stata ammessa. (Nell'elenco, abbiamo preferito saltare l'ottavo posto, per conservare la stessa numerazione degli elenchi precedenti). Però occorre sottolineare una diversità concettualmente importante: *ora ci stiamo occupando di polinomi (cioè di particolari espressioni) e non di numeri razionali; in questo contesto, anche i numeri razionali, come* 0, 1, $\frac{3}{5}$ *devono essere pensati come polinomi. Naturalmente, in virtú delle proprietà formali ammesse, i numeri-polinomi si comportano esattamente come si comportano i corrispondenti numeri in* $\mathbf{Q}$.

Si dice **monomio** un'espressione costruita a partire dalle espressioni atomiche mediante sole operazioni di moltiplicazione; pertanto * un monomio potrà essere scritto come prodotto di un elemento di $\mathbf{Q}$ (che è detto **coefficiente**) per alcune variabili (come al solito, i prodotti di una stessa variabile vengono scritti sotto forma di potenza).

Ad esempio:

$$3x^2y^3z \ , \ \frac{1}{2} \ , \ 2x^4y^3z \ , \ -x^2y$$

sono monomi, con coefficiente 3, $\frac{1}{2}$, 2, -1 (rispettivamente).

Si dice **grado di un monomio** *la somma degli esponenti con cui compaiono le variabili.* Nell'esem-

* In virtú delle proprietà 5) e 6).

pio precedente, i monomi hanno grado 6, 0, 8, 3 (rispettivamente).

Come abbiamo visto fin dal cap. 9, applicando le proprietà formali, un polionomio può essere scritto come somma di monomi. Dopo avere sommato i monomi simili ed eliminato quelli nulli, il polinomio risulta scritto in **forma canonica**. Ad esempio:

$$(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)=x^3+x^2y+xy^2-x^2y-$$
$$-xy^2-y^3=x^3-y^3$$

Si intuisce che la forma canonica è unica (a parte il diverso ordine con cui si possono scrivere i fattori di ciascun mononio ed elencare i vari monomi).

In altre parole: le nostre proprietà formali non possono consentire di trasformare un polinomio in forma canonica in un altro che abbia forma canonica diversa. Non dimostreremo qui questo risultato, che richiede alcune verifiche un po' noiose. *In generale* *, *un polinomio viene dato in forma canonica.*

Si dice **grado di un polinomio** *non nullo il maggiore dei gradi dei monomi che lo compongono.*

Ad esempio, il polinomio

$$xy^2z-2^8xy+5$$

ha grado 4.

Al polinomio nullo si può attribuire come grado (al semplice scopo di far tornare qualche enunciato di tipo generale) un qualsiasi intero negativo. Come abbiamo già visto in varie questioni particolari, il grado è un indice della complessità del polinomio; nello studio delle equazioni algebriche in x, cioè delle equazioni che si ottengono ponendo

* A meno che non ci siano motivi specifici in contrario.

uguale a zero un polinomio in x, il grado ha un'evidente importanza. Abbiamo visto che una equazione di primo grado ha una soluzione, una equazione di secondo grado non ne ha piú di due; vedremo in questo stesso capitolo che una equazione algebrica di grado n non può avere piú di n soluzioni *.

Aggiungiamo alcune osservazioni importanti che si riferiscono alla teoria generale dei polinomi.

1. Fino ad ora, anche per collegarci con quanto avevamo esposto nel cap. 9, abbiamo parlato di polinomi a coefficienti in $\mathbf{Q}$ (o, come si dice, di polinomi *su* $\mathbf{Q}$). Ma, alla stessa maniera, si possono considerare polinomi su $\mathbf{R}$, su $\mathbf{Z}$, su $\mathbf{Z}_n$ o su altri insiemi numerici. Quale è la struttura algebrica indispensabile per questo insieme dei coefficienti? Per ora basta ben poco: basta che in esso siano definite le operazioni di addizione, di « opposto » e di moltiplicazione, e che siano già valide nel suo interno le proprietà 1), ..., 7) e 9) che abbiamo elencato all'inizio. Basta dunque che i coefficienti siano un *anello commutativo con unità.*

Nei prossimi paragrafi, allo scopo di eseguire altre importanti operazioni, diventeremo piú esigenti riguardo all'insieme dei coefficienti.

2. Se A è un anello commutativo con unità, indicheremo con $A[x]$ l'insieme dei polinomi su A nella sola variabile x, con $A[x, y]$ l'insieme dei polinomi su A nelle variabili x, y; ecc.

È evidente che, eseguendo le operazioni di addizione, di « opposto », di moltiplicazione su elementi di $A[x]$, si ritrovino elementi di $A[x]$, ecc.; inoltre valgono le proprietà 1), ..., 7) e 9).

Possiamo allora affermare:

* Abbiamo già notato un grosso aumento di difficoltà nel passare dal primo al secondo grado; figuriamoci i gradi superiori...!

Sia A un anello commutativo con unità; gli insiemi $A[x]$, $A[x, y]$, ecc. sono anch'essi anelli commutativi con unità.

3. Nello studio dei polinomi, e nell'impiego dei polinomi in problemi specifici, è necessario usare, oltre alle lettere che indicano le variabili (ad es. $x, y, z, \ldots$), altre lettere, che stanno ad indicare un elemento dell'anello dei coefficienti (ad es.: $a, b, c, \ldots$). Evidentemente, nessuno può contestare il diritto di usare una lettera (che non deve essere considerata come una delle variabili del polinomio!) per indicare un coefficiente.

Ad esempio: sappiamo che, preso nel piano un riferimento cartesiano, una retta si rappresenta con l'equazione $ax + by - c = 0$, dove a e b non sono entrambi nulli. In questo contesto, si assumono dunque come variabili x ed y, e si considerano a, b, c come parametri numerici. (Tanto che si afferma che l'equazione della retta è di primo grado in x ed y). In altre questioni [ad esempio, quando si volesse studiare il fascio delle rette che passano per un punto $P \leftrightarrow (x, y)$ fissato] potrebbe convenire di considerare a, b, c come variabili e x ed y parametri. Se il polinomio $ax + by - c$ fosse considerato nelle variabili x, y, a, b, c, esso risulterebbe evidentemente di secondo grado *.

4. Dal punto di vista formale quanto abbiamo ora detto può lasciare un po' insoddisfatti: si può desiderare una presentazione del polinomio $ax + by - c$ (per restare nel solito esempio) da cui risulti chiaramente che x ed y sono da considerarsi variabili e mentre $a, b, -c$ sono da considerarsi elementi dell'insieme dei coefficienti. Ebbene, un modo elegante per sistemare le cose è il seguente: *tenere presente che* $\mathbf{R}[a, b, c]$ *è un anello (commutativo con unità) e che il polinomio* $ax + by - c$ *si può considerare come un polinomio nelle variabili* x, y, *con coefficienti in* $\mathbf{R}[a, b, c]$. Rovesciando

* E ciò potrebbe non avere alcun interesse nel problema specifico che consideriamo.

le parti, cioè prendendo a, b, c come variabili, il polinomio verrebbe considerato come un polinomio a coefficienti in $\mathbf{R}[x, y]$. Considerando invece x, y, a, b, c come variabili il nostro polinomio potrebbe essere visto come un elemento di $\mathbf{R}[a, b, c, x, y]$. Contenti tutti? ...

5. Abbiamo sottolineato il ruolo delle parentesi nell'indicare le precedenze fra le operazioni che intervengono in un'espressione. Si potrebbe però adottare una notazione, detta **notazione polacca** *, che permette di fare a meno delle parentesi. Si tratta semplicemente di scrivere il segno dell'operazione davanti al segno degli operandi.

Ad esempio:

invece di scrivere $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ si scrive $+ \mathcal{A}\mathcal{B}$
invece di scrivere $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ si scrive $\cdot \mathcal{A}\mathcal{B}$

Vediamo da alcuni esempi come, con questa semplicissima convenzione, si possano eliminare le parentesi. Ad esempio:

$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}$	si scrive	$\cdot + \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$
$\mathcal{A} + \mathcal{B} \cdot \mathcal{C}$	si scrive	$+ \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}\mathcal{C}$
$\mathcal{C} \cdot (\mathcal{A} + \mathcal{B})$	si scrive	$\cdot \mathcal{C} + \mathcal{A}\mathcal{B}$
$\mathcal{C} \cdot \mathcal{A} + \mathcal{B}$	si scrive	$+ \cdot \mathcal{C}\mathcal{A}\mathcal{B}$

Si potrebbe dimostrare che, in ogni caso, la collocazione opportuna dei segni di operazione fissa senza equivoci le precedenze.

La notazione polacca è divenuta importante soprattutto dopo che è stata adottata per il linguaggio di talune macchine calcolatrici programmabili; effettivamente il suo impiego in questo campo risulta del tutto spontaneo **.

* Perché introdotta dal logico polacco Lukasiewicz (1878-1956).
** E può consentire una notevole economia di scrittura (il che può essere piú importante di quello che appare). In pratica si usa spesso la « notazione polacca inversa » che consiste nel mettere il segno di operazione *dopo* gli operandi. Dal punto di vista concettuale, si tratta evidentemente della stessa cosa.

Esercizi

1 Ridurre a forma canonica i seguenti polinomi su **R**

$(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$; $(a-1)(a^2-4)-a(4-a)(1-a)$

$\left(2x-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}+2x\right)\left(4x^2+\frac{1}{9}\right)$; $\left(4x^4-2x^2y^3+\frac{1}{4}y^6\right)\left(2x^2-\frac{1}{2}y^3\right)$

$(x^3-bx^2+b^2x-b^3)(x+b)$; $\left(-\frac{1}{3}a\right)\left(2ab-\frac{1}{2}-b^2\right)(2a+2b)$

$\left(\frac{3}{4}n^2+3\right)\left(\frac{2}{3}nm-3m\right)$; $(a+b-c+d)(a+b+c-d)$

2 Dimostrare le seguenti relazioni fra polinomi su **R**:

$(a^6+b^6)(a+b)-(a^2+b^2)(a^5+b^5)=(a-b)^2(a+b)(a^2+b^2)ab$

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

$(a^2+b^2-c^2)^2+[(c-a)^2+(c-b)^2-c^2]^2=[a^2+(a-c)^2-(a-b)^2]^2+$
$+[b^2+(b-c)^2+(b-a)^2]^2$

$a(a-3b)^2+b(b-3a)^2=(a+b)^3$

3 Presentare il seguente polinomio di $\mathbf{R}[x,y]$ come un polinomio in forma canonica nella variabile x, a coefficienti in $\mathbf{R}[y]$:

$3(x+y)^2+x^4y^2+2x^2y+x^3y+2$

4 Porre in forma canonica i seguenti polinomi su $\mathbf{Z}_2$:

$(x+y)^2$, $(1+x+x^2+x^3)(1+x)$, $(x+y)^4$

5 Calcolare su $\mathbf{Z}_7$: $(3x^3+5x-4)\cdot(4x^3-x+3)$

* **6** Trascrivere in notazioni usuali le seguenti espressioni scritte in notazioni polacche:

$+\cdot ax\cdot by$, $\cdot+\cdot ax\cdot by+uv$

* **7** Esprimere con notazioni polacche la proprietà associativa dell'addizione e la proprietà distributiva.

I polinomi in una variabile

23.2 Ora restringeremo il nostro interesse ai polinomi nella sola variabile x. Il caso che avremo sempre sottomano sarà quello dei polinomi su $\mathbf{Q}$ o su $\mathbf{R}$; tuttavia quello che diremo in questo paragrafo e nei due successivi si applicherà perfettamente ai polinomi su un corpo F qualsiasi.

(Come vedremo, non ci basterà piú prendere i coefficienti in un anello, sia pure commutativo e con unità). Un polinomio in x, di grado n, potrà essere scritto nella forma *

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

dove, se si vuole appunto che il grado sia n, occorre supporre $a_n \neq 0$.

Anzitutto, vediamo come si comporta il grado quando si compiono le operazioni di addizione e moltiplicazione. Siano

$$\mathcal{A}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

$$\mathcal{B}(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$$

Supponiamo $\mathcal{A}$ di grado n, $\mathcal{B}$ di grado m: perciò $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$. Che cosa possiamo dire del grado di $\mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x)$? Supponiamo $n > m$: allora è chiaro che nel polinomio $\mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x)$ il monomio di grado piú alto è a_nx^n, quindi il grado di $\mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x)$ risulta n.

Ad esempio, siano

$$\mathcal{A}(x) = 2 + 3x + 5x^3 \quad , \quad \mathcal{B}(x) = 1 + x - 2x^2$$

si ottiene

$$\mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x) = 3 + 4x - 2x^2 + 5x^3$$

Se si ha $m = n$, è evidente che il grado di $\mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x)$ non può superare il comune valore dei gradi; ma in certi casi può anche abbassarsi.

* Ordinata per grado crescente dei monomi.

Ad esempio, siano

$$\mathcal{A}(x) = 2 + 3x + 5x^3 \quad , \quad \mathcal{B}(x) = 1 + 2x - 5x^3$$

si ha

$$\mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x) = 3 + 5x$$

Possiamo concludere: *il polinomio somma di due polinomi ha un grado uguale al maggiore dei due gradi quando questi sono diversi. Quando i due gradi sono uguali, il polinomio somma ha un grado che non supera il valore comune.*

È piú semplice il comportamento del grado riguardo alla moltiplicazione. Non c'è dubbio che, nella moltiplicazione di $\mathcal{A}(x)$ per $\mathcal{B}(x)$ (con le notazioni di prima), il monomio di grado piú alto lo si ottiene moltiplicando fra loro i monomi di grado piú alto di ciascun polinomio:

$$a_n x^n \cdot b_m x^m = a_n b_m x^{n+m}$$

Notiamo che, essendo $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ si ha $a_n b_m \neq 0$, perché in un corpo vale la « legge di annullamento del prodotto ». Dunque il grado è $m + n$. Concludiamo:

Il grado del prodotto di due polinomi non nulli è uguale alla somma dei gradi.

Quando abbiamo definito i polinomi abbiamo ammesso soltanto espressioni costruite con operazioni di addizione e moltiplicazione (e di « opposto ») ma non di « reciproco ». Non ci meravigliamo del fatto che nell'ambito dei polinomi non si possa in generale eseguire la divisione (intesa in senso esatto).

Ad esempio, chiediamoci: è possibile in $\mathbf{Q}(x)$ dividere $x - 1$ per $x + 1$?

Cioè: è possibile trovare un polinomio $\mathcal{S}(x)$ tale che $(x+1) \cdot \mathcal{S}(x) = x - 1$? Per quello che abbiamo visto ora, il polinomio $\mathcal{S}(x)$ dovrebbe avere un grado uguale alla differenza fra il grado di $x-1$ e quello di $x+1$, quindi dovrebbe avere grado nullo. I polinomi di grado nullo non sono altro che gli elementi non nulli del corpo (o, come si dice, le costanti); perciò: $\mathcal{S}(x) = k$. Deve allora risultare $(x+1)\,k = kx + k = x - 1$ (uguaglianza fra polinomi!) cioè $kx = x$ e $k = -1$; ma la prima ci dice $k = 1$, la seconda $k = -1$, e questo è assurdo in $\mathbf{Q}$.

Ci accorgiamo allora di essere in una situazione molto vicina a quella trovata nello studio degli interi. Se consideriamo gli interi relativi, l'analogia diventa molto stretta, anche perché tanto $\mathbf{Z}$ quanto $\mathbf{Q}[x]$ (o $\mathbf{R}[x]$) sono anelli commutativi con unità.

Risulta naturale la seguente definizione:

Si dice che il polinomio $\mathcal{A}(x)$ è **multiplo** *del polinomio $\mathcal{B}(x)$ [oppure che $\mathcal{B}(x)$ è* **divisore** *di $\mathcal{A}(x)$] se esiste un polinomio $\mathcal{Q}(x)$ tale che $\mathcal{A}(x) = \mathcal{B}(x)\ \mathcal{Q}(x)$.*

Ad esempio, consideriamo in $\mathbf{R}[x]$ un polinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$ e supponiamo che esso ammetta le radici reali x_1 ed x_2; allora, come sappiamo, si può scrivere

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)\ (x - x_2)$$

Dunque il polinomio è multiplo di $x - x_1$ e di $x - x_2$ in $\mathbf{R}[x]$.

È facile dimostrare per la divisibilità fra polinomi le stesse proprietà che abbiamo trovato per la divisibilità fra numeri interi:

Se un polinomio $\mathcal{D}(x)$ divide $\mathcal{A}(x)$ e divide $\mathcal{B}(x)$ esso divide $\mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x)$.

Se $\mathcal{D}(x)$ *divide* $\mathcal{A}(x)$, *allora divide* $\mathcal{A}(x)\ \mathcal{C}(x)$ *dove* $\mathcal{C}(x)$ *è un polinomio qualsiasi.*

Se $\mathcal{D}(x)$ *divide* $\mathcal{A}(x)$ *ed* $\mathcal{A}(x)$ *divide* $\mathcal{B}(x)$, *allora* $\mathcal{D}(x)$ *divide* $\mathcal{B}(x)$.

Notiamo che un polinomio è in ogni caso divisibile per una costante non nulla ed è divisibile per se stesso moltiplicato per una costante. Per escludere questi casi banali parleremo di divisori **propri**. *Un polinomio si dice* **riducibile** *se ha divisori propri; altrimenti si dice* **irriducibile**; *abbiamo così per i polinomi la nozione analoga a quella di numero primo.*

Ad esempio, in $\mathbf{R}[x]$ il polinomio $x^2 + 1$ è irriducibile (lo si dimostri per esercizio), mentre il polinomio $x^2 - 2$ può essere scomposto in fattori di primo grado:

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2})$$

Notiamo però che se ci mettiamo in $\mathbf{Q}[x]$ anziché in $\mathbf{R}[x]$, il polinomio $x^2 - 2$ risulta anch'esso irriducibile. (Anche questa affermazione deve essere verificata con cura).

Esercizi

1 Eseguire le seguenti operazioni in $\mathbf{R}[x]$:

$2x(x-3) + 4x^2(x^2+3x-1) - (x^4 - x)$

$(2x^2+3x-28)(-2x+2) + (x-10) + 4x$

$(3x^2+1-4x)(5x^2-3+2x)(-1-3x+2x^2)$

2 Eseguire le seguenti operazioni in $\mathbf{Z}_5[x]$:

$(3-x)(x+4) - (1-x)(x^2-x+1)$

$(1-x)(x+3)(4-x) - 2(x^2-1)(x-x^2)$

$(3x-4)(x^3-2x) + (x^2-3)(x+x^2)$

* **3** Eseguire la seguente moltiplicazione in $\mathbf{Z}_6[x]$: $(3x^2 + 2) \cdot (2x^2 + 3)$. Come mai il grado del prodotto non è la somma dei gradi?

4 Siano $\mathcal{A}(x)$ e $\mathcal{B}(x)$ polinomi sullo stesso corpo. Qual è il grado del polinomio $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}(x)$ [cioè del polinomio ottenuto sostituendo $\mathcal{B}(x)$ in luogo di x in $\mathcal{A}(x)$]?

5 Verificare la relazione $\{[(a \cdot x + b) \cdot x + c] \cdot x + d\} \cdot x + e = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.
L'espressione a primo membro, benché non sia canonica, è quella che si presta meglio per il calcolo numerico perché riduce al minimo il numero delle moltiplicazioni.

6 Disponendo di una piccola calcolatrice programmabile, eseguire il programma per il calcolo del polinomio $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$, secondo le indicazioni dell'esercizio precedente.

La divisione con resto fra polinomi

23.3 L'analogia che abbiamo riscontrato fra l'anello dei polinomi in una variabile e l'anello degli interi relativi ci porta a tentare di estendere ai polinomi l'algoritmo della divisione con resto. La divisione con resto fra interi positivi può essere eseguita mediante successive sottrazioni: ad esempio, per dividere 29 per 8 si può procedere attraverso questi successivi passaggi:

$$29 - 8 = 21$$

$$21 - 8 = 13$$

$$13 - 8 = 5$$

A questo punto il processo si conclude perché l'ultima sottrazione ha dato un risultato, 5, minore di 8. Sommando membro a membro le tre uguaglianze scritte si ricava

$$29 - 8 \cdot 3 = 5 \quad , \quad 29 = 8 \cdot 3 + 5$$

Quest'ultima relazione fornisce il risultato voluto: 3 è il quoziente e 5 è il resto della divisione (Vd. § 11.3).

Il singolo passo di questo procedimento consiste nell'abbassare, mediante una sottrazione, il valore del numero su cui si opera. Possiamo seguire una via analoga nel caso dei polinomi? Viene spontaneo di ricorrere al grado, che assume valori interi e che stabilisce, come abbiamo visto, una certa gerarchia di complessità fra i polinomi.

I - *Siano* $\mathcal{A}(x)$, $\mathcal{B}(x)$ *polinomi su un corpo e sia* $\mathcal{B}(x) \neq 0$; *inoltre il grado di* $\mathcal{A}(x)$ *sia maggiore o uguale al grado di* $\mathcal{B}(x)$. *Allora è possibile sottrarre ad* $\mathcal{A}(x)$ *un multiplo di* $\mathcal{B}(x)$ *in modo da ottenere un polinomio di grado inferiore a quello di* $\mathcal{A}(x)$.

La dimostrazione è molto semplice. Siano n il grado di $\mathcal{A}(x)$ ed m il grado di $\mathcal{B}(x)$; il monomio di grado piú alto di $\mathcal{A}(x)$ sia $a_n x^n$ $(a_n \neq 0)$ e quello di grado piú alto di $\mathcal{B}(x)$ sia $b_m x^m$ $(b_m \neq 0)$. Si tratta di « decapitare » $\mathcal{A}(x)$ togliendogli il monomio di grado piú alto.

Poniamo $c = \dfrac{a_n}{b_m}$ (*qui utilizziamo l'ipotesi che si tratti di polinomi su un corpo*!) e sottraiamo da $\mathcal{A}(x)$ il polinomio $\mathcal{B}(x) \cdot cx^{n-m}$ (occorre ricordare che è $n \geq m$). Otteniamo un polinomio

$$\mathcal{R}(x) = \mathcal{A}(x) - \mathcal{B}(x) \cdot cx^{n-m}$$

che è differenza di due polinomi di grado n. Non ci importa per ora calcolare esattamente questo polinomio, ma solo verificare che il coefficiente di x^n è nullo. Infatti, si ha

$$a_n x^n - c b_m x^m x^{n-m} = a_n x^n - \frac{a_n}{b_m} b_m x^n = 0$$

Per eseguire la divisione fra polinomi sulla falsariga della divisione fra gli interi non c'è che da applicare ripetutamente il risultato ora dimostrato.

Un esempio chiarirà perfettamente il procedimento da seguire: vogliamo eseguire la divisione con resto del polinomio

$$\mathcal{A}(x) = 3x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 5$$

per il polinomio

$$\mathcal{B}(x) = 3x^2 + 2$$

Otteniamo (verificare con cura i calcoli!):

$$\mathcal{A}(x) - \mathcal{B}(x)\, x^2 = 2x^3 - x^2 + x + 5 = \mathcal{R}_1(x)$$

$$\mathcal{R}_1(x) - \mathcal{B}(x)\, \frac{2}{3}x = -x^2 - \frac{1}{3}x + 5 = \mathcal{R}_2(x)$$

$$\mathcal{R}_2(x) - \mathcal{B}(x)\, \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3} = \mathcal{R}_3(x)$$

Ora il procedimento ha termine perché il grado di $\mathcal{R}_3(x)$ è inferiore al grado di $\mathcal{B}(x)$. Sommando membro a membro le tre relazioni ottenute, ricaviamo (con ovvie semplificazioni)

$$\mathcal{A}(x) - \mathcal{B}(x)\, \left(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3} = \mathcal{R}_3(x)$$

È naturale assumere il polinomio $-\frac{1}{3}x + \frac{17}{3}$ come resto e il polinomio $x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ come quoziente nella divisione di $\mathcal{A}(x)$ per $\mathcal{B}(x)$.

Di solito, a questi calcoli si dà un assetto che ne facilita l'esecuzione; l'esempio che abbiamo svolto può essere esposto così:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^4 + 2x^3 & + x^2 & + x + 5 & & 3x^2 + 2 \\
\cline{5-5}
-\,3x^4 & - 2x^2 & & & x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \\
\cline{1-3}
2x^3 & - x^2 & + x + 5 & & \\
-\,2x^3 & & -\frac{4}{3}x & & \\
\cline{1-3}
 & -x^2 - \frac{1}{3}x & + 5 & & \\
 & + x^2 & + \frac{2}{3} & & \\
\cline{2-3}
 & & -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3} & &
\end{array}
$$

Dopo queste considerazioni e questi esempi, è opportuno fornire un enunciato preciso, che ricalca alla lettera quello riguardante la divisione con resto fra interi.

II - *Dati due polinomi* $\mathcal{A}(x)$, $\mathcal{B}(x)$ *sul medesimo corpo* **F** , *con* $\mathcal{B}(x) \neq 0$, *esiste un'unica coppia di polinomi* $\mathcal{Q}(x)$, $\mathcal{R}(x)$ *(detti quoziente e resto, rispettivamente) tali che si abbia*

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{B}(x)\ \mathcal{Q}(x) + \mathcal{R}(x) \qquad (1)$$

dove $\mathcal{R}(x)$ *ha grado minore del grado di* $\mathcal{B}(x)$.

Dimostrazione: l'**esistenza** di una coppia di polinomi tali da verificare la relazione (1) è garantita dall'algoritmo della divisione che abbiamo introdotto sopra *. Resta da dimostrare l'**unicità**. Supponiamo dunque che vi siano due coppie $(\mathcal{Q}_1(x)\ ,\ \mathcal{R}_1(x))$ e $(\mathcal{Q}_2(x)\ ,\ \mathcal{R}_2(x))$ che verificano la (1), e tali, naturalmente, che i gradi di $\mathcal{R}_1(x)$

* L'algoritmo è stato predisposto per il caso in cui il grado di $\mathcal{A}(x)$ sia maggiore o uguale del grado di $\mathcal{B}(x)$. Se il grado di $\mathcal{A}(x)$ è minore del grado di $\mathcal{B}(x)$ basta prendere $\mathcal{Q}(x) = 0$ ed $\mathcal{R}(x) = \mathcal{A}(x)$.

e di $\mathcal{R}_2(x)$ siano entrambi inferiori al grado di $\mathcal{B}(x)$, che indicheremo con m.

Si avrà dunque

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{B}(x)\ \mathcal{Q}_1(x) + \mathcal{R}_1(x)$$

e

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{B}(x)\ \mathcal{Q}_2(x) + \mathcal{R}_2(x)$$

Sottraendo membro a membro si ricava

$$0 = \mathcal{B}(x)\ [\mathcal{Q}_1(x) - \mathcal{Q}_2(x)] + [\mathcal{R}_1(x) - \mathcal{R}_2(x)] \qquad (2)$$

Questa relazione ci dice che deve essere $\mathcal{Q}_1(x) - \mathcal{Q}_2(x) = 0$; infatti, se non fosse cosí il polinomio $\mathcal{Q}_1(x) - \mathcal{Q}_2(x)$ avrebbe un grado $k \geq 0$; perciò il prodotto $\mathcal{B}(x)\ [\mathcal{Q}_1(x) - \mathcal{Q}_2(x)]$ avrebbe grado $m + k$, mentre l'addendo $\mathcal{R}_1(x) - \mathcal{R}_2(x)$ avrebbe grado *minore* di m. Il secondo membro avrebbe dunque grado uguale ad $m + k$, e non potrebbe coincidere con il polinomio nullo come vuole la (2). Deve dunque essere $\mathcal{Q}_1(x) = \mathcal{Q}_2(x)$ e, di conseguenza, $\mathcal{R}_1(x) - \mathcal{R}_2(x) = 0$, cioè $\mathcal{R}_1(x) = \mathcal{R}_2(x)$ ■

Notiamo che — analogamente a quello che accade nell'ambito degli interi naturali — *il polinomio $\mathcal{A}(x)$ è divisibile per il polinomio $\mathcal{B}(x)$ quando e soltanto quando il resto della divisione di $\mathcal{A}(x)$ per $\mathcal{B}(x)$ è nullo*. Infatti, se $\mathcal{A}(x)$ è divisibile per $\mathcal{B}(x)$, ciò significa che esiste un polinomio $\mathcal{Q}(x)$ tale che $\mathcal{A}(x) = \mathcal{B}(x) \cdot \mathcal{Q}(x)$; questa relazione, in base al risultato di unicità ora dimostrato, ci dice che, nella divisione di $\mathcal{A}(x)$ per $\mathcal{B}(x)$ il quoziente è $\mathcal{Q}(x)$, ed il resto è nullo. Viceversa, se il resto è nullo la relazione (1) ci dice che $\mathcal{A}(x)$ è divisibile per $\mathcal{B}(x)$.

Un caso molto importante è quello in cui si vuole dividere un polinomio $\mathcal{A}(x)$ per un polinomio del tipo $x - \alpha$, dove α è un elemento del corpo

F dei coefficienti. Il resto deve avere grado < 1 e perciò non è altro che una costante k, eventualmente nulla:

$$\mathcal{A}(x) = (x - \alpha)\ \mathcal{Q}(x) + k \qquad (3)$$

Per calcolare k, basta sostituire in questa uguaglianza α in luogo di x; poiché il primo addendo a secondo membro si annulla, risulta

$$\mathcal{A}(\alpha) = k$$

Possiamo allora affermare:

III - (Regola di Ruffini). *Il resto della divisione del polinomio* $\mathcal{A}(x)$ *per il polinomio* $x - \alpha$ *è dato da* $\mathcal{A}(\alpha)$, *cioè dal valore che il polinomio* $\mathcal{A}(x)$ *assume quando ad* x *si sostituisce* α. *In particolare, il polinomio* $\mathcal{A}(x)$ *è divisibile per* $x - \alpha$ *se e soltanto se risulta* $\mathcal{A}(\alpha) = 0$, *cioè se* (come si dice) α *è una radice del polinomio.*

Come caso particolare, ritroviamo il risultato già visto nel cap. 18 riguardo alla fattorizzazione di un trinomio di secondo grado: $ax^2 + bx + c$ con radici reali, x_1, x_2, con $x_1 \neq x_2$. Poiché il trinomio si annulla se si sostituisce ad x il valore x_1, per il teorema III esso è divisibile per $x - x_1$; dunque si ha $ax^2 + bx + c = (x - x_1)\ \mathcal{Q}(x)$ dove $\mathcal{Q}(x)$ è un polinomio di primo grado, che deve essere divisibile per $x - x_2$, dal momento che si annulla per $x = x_2$. Dunque si ha $\mathcal{Q}(x) = k \cdot (x - x_2)$ e, in definitiva, $ax^2 + bx + c = k\,(x - x_1) \cdot (x - x_2)$; da questa uguaglianza si ricava subito che deve essere $k = a$. Si ritrova dunque la fattorizzazione $ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$.

Nel caso in cui il trinomio di secondo grado abbia un'unica radice x^*, ragionando in modo analogo si trova $ax^2 + bx + c = a\,(x - x^*)^2$. In questo caso si dice che la radice x^* è *doppia.*

Concludiamo con un'osservazione interessante.

Consideriamo le espressioni fratte $\frac{\mathcal{A}(x)}{\mathcal{B}(x)}$ dove $\mathcal{A}(x)$ e $\mathcal{B}(x)$ sono polinomi sullo stesso corpo **F**, ed è $\mathcal{B}(x) \neq 0$. Come abbiamo detto nel cap. 9, *ogni espressione fratta, cioè ogni espressione costruita a partire dalle espressioni atomiche mediante le operazioni di addizione, di moltiplicazione, di « opposto », di « reciproco » (purché quest'ultima operazione non si applichi mai ad un'espressione nulla) si può ricondurre alla forma canonica* $\frac{\mathcal{A}(x)}{\mathcal{B}(x)}$. *Per le espressioni fratte valgono tutte le 9 proprietà formali, compresa naturalmente l'esistenza dell'espressione reciproca di un'espressione non nulla. Dunque, le espressioni fratte in x costituiscono un corpo. Lo stesso si può dire per le espressioni fratte in più variabili (a coefficienti in un corpo* **F**).

Queste considerazioni sono importanti se si vuole eseguire la divisione di un polinomio i cui coefficienti contengono altre variabili. Ad esempio, si vuole dividere il polinomio $ax^3 + 2ax^2 + a^2x + a$ per il polinomio $(a + 1)x^2 + a^2$. Entrambi questi polinomi possono essere visti come polinomi in x sul corpo delle espressioni fratte in a. Allora si può eseguire la divisione in questo modo:

$$
\begin{array}{l|l}
ax^3 + 2ax^2 + a^2x + a & (a+1)x^2 + a^2 \\
\hline
-ax^3 - \dfrac{a^3}{a+1}x & \dfrac{a}{a+1}x + \dfrac{2a}{a+1} \\
\hline
2ax^2 + \dfrac{a^2}{a+1}x + a & \\
-2ax^2 - \dfrac{2a^3}{a+1} & \\
\hline
\dfrac{a^2}{a+1}x + \dfrac{a^2 + a - 2a^3}{a+1} &
\end{array}
$$

Dunque il quoziente è $\frac{a}{a+1}x + \frac{2a}{a+1}$ ed il

resto è $\frac{a^2}{a+1}x + \frac{a^2+a-2a^3}{a+1}$

Esercizi

1 Eseguire la divisione con resto fra i seguenti polinomi:

$\mathcal{A}(x) = x^5 - 3x^3 + 5x + 4$ $\quad$ $\mathcal{B}(x) = x^3 + 3$

$\mathcal{A}(x) = x^3 + 1$ $\quad$ $\mathcal{B}(x) = x + 1$

$\mathcal{A}(x) = 3x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 6$ $\quad$ $\mathcal{B}(x) = 2x^2 + 1$

2 Trovare tutte le soluzioni della seguente equazione, dopo aver preso atto che una delle soluzioni è 1 : $x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = 0$.

* **3** Un polinomio su un certo corpo **F**, di secondo o di terzo grado, è riducibile se e soltanto se ha una radice in **F**. Dimostrarlo.

4 Dimostrare che il polinomio (di quarto grado) $x^4 + 2x^2 + 1$ (su **Q** o su **R**) è riducibile, ma non ha alcuna radice in **Q** o in **R**.

** **5** Dimostrare che il polinomio $x^4 - 2$ è riducibile in $\mathbf{R}[x]$, ma non in $\mathbf{Q}[x]$.

6 Cercare di esprimere in modo significativo il risultato della divisione del polinomio $\mathcal{A}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .. + a_1 x + a_0$ per il polinomio $\mathcal{B}(x) = x - \alpha$. Si dovrà ritrovare, fra l'altro, il teorema III.

7 Dividere il polinomio $x^n - 1$ per il polinomio $x - 1$.

* **8** Decidere se il polinomio $x^n + 1$ è divisibile per il polinomio $x + 1$ ed eseguire la divisione con resto.

9 Un'equazione di secondo grado a coefficienti razionali, se ha una radice razionale ha tutte le radici razionali. Dimostrarlo.

* **10** Dimostrare con un esempio che non è possibile in generale fare la divisione dei polinomi in due variabili come si fa per i polinomi di una variabile. (In altre parole: il teorema II per i polinomi di due variabili è falso).

Il massimo comun divisore di due polinomi

23.4 Sempre lasciandoci guidare dall'analogia che c'è fra l'anello dei polinomi in una variabile e l'anello degli interi relativi, vogliamo esplorare la possibilità di introdurre il massimo comun di-

visore di due polinomi. Per introdurre con precisione questa nozione conviene puntare sull'**ordinamento per divisibilità**. È opportuno rivedere quanto abbiamo esposto nel § 19.5 e porre questo quesito: *la relazione* « $\mathcal{A}(x)$ *è divisore di* $\mathcal{B}(x)$ » [*ossia* « $\mathcal{B}(x)$ *è multiplo di* $\mathcal{A}(x)$ »] *è una relazione di ordine*? Anzitutto è evidente che vale la proprietà *riflessiva* [« $\mathcal{A}(x)$ *è divisore di* $\mathcal{A}(x)$ »] e la proprietà *transitiva*, che abbiamo messo in evidenza nel § 23.2. [« Se $\mathcal{A}(x)$ divide $\mathcal{B}(x)$ e $\mathcal{B}(x)$ divide $\mathcal{C}(x)$, allora $\mathcal{A}(x)$ divide $\mathcal{C}(x)$ »]. Vediamo dunque se sussiste la proprietà *antisimmetrica*; supponiamo che $\mathcal{A}(x)$ divida $\mathcal{B}(x)$ e che $\mathcal{B}(x)$ divida $\mathcal{A}(x)$. Allora $\mathcal{A}(x)$ e $\mathcal{B}(x)$ hanno lo stesso grado. Dividendo $\mathcal{A}(x)$ per $\mathcal{B}(x)$ risulta, d'altra parte: $\mathcal{A}(x) = k\ \mathcal{B}(x)$, dove k è una costante. Dunque $\mathcal{A}(x)$ e $\mathcal{B}(x)$ non sono necessariamente uguali fra loro; tuttavia questi due polinomi si ottengono l'uno dall'altro mediante la moltiplicazione per una costante non nulla. Nella teoria della divisibilità dei polinomi possiamo considerare *equivalenti* due polinomi che si ottengono l'uno dall'altro semplicemente mediante la moltiplicazione per una costante; ad esempio: $x^3 - 1$, $2x^3 - 2$. Dunque, se consideriamo come elementi le classi di equivalenza di polinomi anziché i singoli polinomi, tutto si sistema. Del resto, una difficoltà simile si trova nello svolgere la teoria della divisibilità nell'anello degli interi relativi, anziché nell'insieme degli interi naturali. Infatti due interi relativi fra loro opposti (ad es.: 5 e — 5) sono divisibili l'uno per l'altro, pur senza coincidere; anche in questo caso è opportuno identificarli fra loro (cioè introdurre una relazione di equivalenza in cui due numeri fra loro opposti stiano nella stessa classe). Tutto ciò è così elementare che, passando dagli interi naturali agli interi relativi non abbiamo neppure sentito il bisogno di dirlo esplicitamente.

Veniamo dunque alla definizione del massimo comun divisore di due polinomi:

Dati due polinomi $\mathcal{A}(x)$, $\mathcal{B}(x)$ *si dice loro massimo comun divisore e si indica:* m.c.d. ($\mathcal{A}(x)$, $\mathcal{B}(x)$)

un polinomio $\mathfrak{D}(x)$ *che sia divisore comune di* $\mathcal{A}(x)$ *e* $\mathcal{B}(x)$ *e che sia multiplo di ogni divisore comune di* $\mathcal{A}(x)$ *e* $\mathcal{B}(x)$. [In altre parole: *nell'insieme dei divisori comuni di* $\mathcal{A}(x)$ *e* $\mathcal{B}(x)$, $\mathfrak{D}(x)$ *sia un elemento massimo rispetto all'ordinamento per divisibilità*].

Naturalmente, ci si deve chiedere se il massimo comun divisore di due polinomi esiste (la cosa non ha il grado di evidenza che ha nel campo degli interi naturali). A dimostrare l'esistenza del m.c.d. $(\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x))$ (e a calcolarlo) provvede l'algoritmo di Euclide che si introduce e si giustifica esattamente come nel caso degli interi naturali (§ 19.3). I successivi resti delle divisioni sono multipli di ogni divisore comune di $\mathcal{A}(x)$, $\mathcal{B}(x)$ ed hanno gradi decrescenti. Il procedimento ha quindi termine, cioè si finisce per ottenere un resto nullo.

L'ultimo dei resti non nulli è divisore comune di $\mathcal{A}(x)$ e $\mathcal{B}(x)$ ed è multiplo di ogni divisore comune di $\mathcal{A}(x)$ e $\mathcal{B}(x)$, pertanto esso non è che il m.c.d. $(\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x))$.

Vediamo un esempio: vogliamo calcolare il m.c.d. $(x^5 - 4x\ ,\ x^4 - 4x^2 + 4)$.

Eseguiamo le divisioni successive:

$$x^5 - 4x = (x^4 - 4x^2 + 4)\,x + (4x^3 - 8x)$$

$$x^4 - 4x^2 + 4 = (4x^3 - 8x)\,\frac{1}{4}\,x + (-2x^2 + 4)$$

$$4x^3 - 8x = (-2x^2 + 4)\,(-2x)$$

$x^5 - 4x$	$x^4 - 4x^2 + 4$	x
$x^4 - 4x^2 + 4$	$4x^3 - 8x$	$\frac{1}{4}x$
$4x^3 - 8x$	$-2x^2 + 4$	$-2x$

In questa tabella abbiamo segnato le coppie di

polinomi che conservano il massimo comun divisore della coppia originaria $\mathcal{A}(x)$, $\mathcal{B}(x)$. Concludiamo che il massimo comun divisore cercato è $-2x^2 + 4$; volendolo indicare a meno di una costante moltiplicativa, lo possiamo porre anche uguale a $x^2 - 2$.

Ancora un'osservazione: *il massimo comun divisore di* $\mathcal{A}(x)$ *e* $\mathcal{B}(x)$ *può essere anche indicato (sempre a meno di una costante moltiplicativa) come il divisore comune di* $\mathcal{A}(x)$ *e* $\mathcal{B}(x)$ *di massimo grado.* Infatti, come abbiamo visto, $\mathcal{D}(x) = \text{m.c.d.}(\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x))$ è multiplo di ogni divisore comune di $\mathcal{A}(x)$ e $\mathcal{B}(x)$. Un divisore comune di $\mathcal{A}(x)$ e $\mathcal{B}(x)$ di massimo grado coincide necessariamente con $\mathcal{D}(x)$, a meno di una costante moltiplicativa.

Giunti a questo punto, l'estensione ai polinomi (*sempre su un corpo e in una sola variabile*) delle proprietà che abbiamo già trovato per il massimo comun divisore di due interi è soltanto un utile esercitazione che lasciamo al lettore, limitandoci ad elencare le proprietà piú interessanti:

I - *Dati due polinomi* $\mathcal{A}(x)$, $\mathcal{B}(x)$, *si possono trovare due polinomi* $\mathcal{M}(x)$, $\mathcal{N}(x)$ *tali che*

$$\text{m.c.d.}(\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)) = \mathcal{A}(x)\,\mathcal{M}(x) + \mathcal{B}(x)\,\mathcal{N}(x)$$

II - *Sia* $\mathcal{A}(x)$ *un polinomio irriducibile che divide il prodotto* $\mathcal{B}(x) \cdot \mathcal{C}(x)$. *Allora esso divide uno (almeno) dei fattori* $\mathcal{B}(x)$, $\mathcal{C}(x)$.

Esercizi

1 Calcolare il m.c.d. dei polinomi $\mathcal{A}(x)$ e $\mathcal{B}(x)$, con

$\mathcal{A}(x) = x^3 - 1$ $\qquad$ $\mathcal{B}(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$

$\mathcal{A}(x) = 2x^3 + 6x^2 - x - 3$ $\qquad$ $\mathcal{B}(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x + 1$

$\mathcal{A}(x) = x^{18} - 1$ $\qquad$ $\mathcal{B}(x) = x^{33} - 1$

2 Rappresentare il m.c.d. $(\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x))$ come combinazione lineare di $\mathcal{A}(x)$ e $\mathcal{B}(x)$, secondo il teorema I, nel caso:

$\mathcal{A}(x) = x^4 + 1$, $\mathcal{B}(x) = x^4 - 1$; $\mathcal{A}(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, $\mathcal{B}(x) = x^3 - 1$

3 I due polinomi in $\mathbf{R}[x]$: $x^3 + x^2 - 2x - 2$, $x^3 - x^2 - 2x + 2$, hanno radici comuni? Come trovarle tutte?

** **4** Formulare una condizione sui coefficienti dei polinomi $ax^2 + bx + c$, $a'x^2 + b'x + c'$ che assicuri l'esistenza di una radice comune.

** **5** Riprendere l'enunciato del teorema I. Dimostrare che se $\mathcal{A}(x)$ e $\mathcal{B}(x)$ hanno gradi positivi si può fare in modo che il grado di $\mathcal{M}(x)$ sia inferiore al grado di $\mathcal{B}(x)$ e il grado di $\mathcal{N}(x)$ sia inferiore al grado di $\mathcal{A}(x)$. [Si può ragionare così: supponiamo che il grado di $\mathcal{M}(x)$ sia $\geq$ del grado di $\mathcal{B}(x)$; eseguiamo la divisione con resto di $\mathcal{M}(x)$ per $\mathcal{B}(x)$ . . .].

Le funzioni polinomiali

23.5 Fino ad ora abbiamo considerato i polinomi soltanto sotto l'aspetto *formale* cioè come espressioni che si scrivono in un certo modo e si fanno interagire fra loro secondo certe regole. Ora vogliamo occuparci del *significato* piú usuale e piú importante che può avere un polinomio: quello di rappresentare certe funzioni.

Ad esempio, il polinomio di $\mathbf{R}[x]$

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

ci indica la seguente funzione avente come dominio e come codominio $\mathbf{R}$:

$$x \longrightarrow x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

In generale, *se abbiamo un polinomio* $\mathcal{P}(x)$ *sul corpo* $\mathbf{F}$, *chiameremo* **funzione polinomiale** *associata al polinomio la funzione, avente come dominio e codominio* $\mathbf{F}$, *che si definisce interpretando* x *come un elemento di* $\mathbf{F}$ *e calcolando per esso il polinomio.*

Questa distinzione fra polinomio e funzione polinomiale può apparire una insopportabile pignoleria, tanto piú che, nei problemi concreti da cui

siamo partiti (cap. 9) era proprio la funzione polinomiale quella che ci interessava maggiormente. Tuttavia, ci pare che la distinzione sia importante e che meriti un po' di sforzo di comprensione.

Il problema è questo: è chiaro che ad un polinomio corrisponde un'unica funzione polinomiale; ma, viceversa, non può accadere che una funzione polinomiale si possa rappresentare con piú di un polinomio? Effettivamente si possono costruire facilmente esempi di questo tipo: consideriamo in $\mathbf{Z}_3$ (insieme delle classi di resti modulo 3, che è un corpo, perché 3 è un numero primo) il polinomio $x^3 - x$. Evidentemente non si tratta del polinomio nullo, tuttavia i valori assunti dalla corrispondente funzione polinomiale sono tutti nulli. Basta fare la verifica per le tre classi di resti: $[0]$, $[1]$, $[2]$.

Si ha

$$[0]^3 - [0] = [0] \quad , \quad [1]^3 - [1] = [1^3] - [1] = [0]$$
$$[2]^3 - [2] = [8] - [2] = [6] = [0]$$

Dunque su $\mathbf{Z}_3$, vi sono due polinomi (ma anche tanti altri!) che danno luogo alla funzione polinomiale nulla: il polinomio nullo e il polinomio $x^3 - x$.

È abbastanza spontaneo attribuire la colpa di questo comportamento patologico al fatto che il corpo $\mathbf{Z}_3$ è eccessivamente striminzito ($\mathbf{Z}_3$ ha solo 3 elementi e le funzioni $\mathbf{Z}_3 \to \mathbf{Z}_3$ sono in numero di $3^3 = 27$, soltanto, mentre i polinomi a coefficienti in $\mathbf{Z}_3$ sono evidentemente un'infinità perché il grado può essere preso grande quanto si vuole). Per indagare in questa direzione, cominciamo a vedere in quali casi un polinomio di $\mathbf{F}[x]$ (dove $\mathbf{F}$ è un corpo qualsiasi) che si annulli per molti elementi di $\mathbf{F}$ è necessariamente nullo.

I - *Un polinomio di* $\mathbf{F}[x]$ *di grado non superiore ad* n, *che abbia in* $\mathbf{F}$ $n+1$ *radici distinte è nullo.*

Dimostrazione: sia $\mathfrak{T}(x)$ un polinomio di grado $\leq n$, che si annulla per gli elementi, fra loro distinti, di **F**: $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$. Sappiamo dal teorema III del § 23.3, che $\mathfrak{T}(x)$ è divisibile per $x - x_1$, dunque si può scrivere

$$\mathfrak{T}(x) = (x - x_1)\ \mathfrak{T}_1(x) \tag{4}$$

Sostituendo in questa il valore x_2 in luogo di x, si ha

$$\mathfrak{T}(x_2) = 0 = (x_2 - x_1)\ \mathfrak{T}_1(x_2) \tag{5}$$

Essendo $x_2 \neq x_1$, risulta certamente $\mathfrak{T}_1(x_2) = 0$; pertanto $\mathfrak{T}_1(x)$ è divisibile per $x - x_2$ e si può scrivere

$$\mathfrak{T}_1(x) = (x - x_2)\ \mathfrak{T}_3(x) \tag{6}$$

Sostituendo l'espressione di $\mathfrak{T}_1(x)$ nella (4) si ricava

$$\mathfrak{T}(x) = (x - x_1)\ (x - x_2)\ \mathfrak{T}_3(x)$$

Il polinomio $\mathfrak{T}_3(x)$ si annulla in x_3, e pertanto può essere scomposto, con separazione del fattore $(x - x_3)$. Cosí procedendo si arriva a scrivere

$$\mathfrak{T}(x) = (x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_3)\ \ldots$$
$$(x - x_n)\ (x - x_{n+1})\ \mathfrak{Q}(x)$$

dove $\mathfrak{Q}(x)$ è un polinomio. Ma se $\mathfrak{Q}(x)$ non fosse il polinomio nullo il secondo membro avrebbe grado $\geq n + 1$, mentre per ipotesi $\mathfrak{T}(x)$ ha grado $\leq n$. Si conclude che $\mathfrak{Q}(x)$ è il polino-

mio nullo, e perciò anche $\mathcal{T}(x)$ è il polinomio nullo ■

Da questo primo teorema si ottengono facilmente le conclusioni che ci interessano:

II - *Un polinomio su un corpo* **F** *di infiniti elementi è certamente nullo se la funzione polinomiale ad esso associata è identicamente nulla.*

Sia infatti $\mathcal{T}(x)$ un qualsiasi polinomio, e n sia il suo grado. Per ipotesi, la funzione polinomiale associata a $\mathcal{T}(x)$ si annulla per tutti gli infiniti valori di **F**, e quindi certamente per $n+1$ valori distinti. Allora è $\mathcal{T}(x) = 0$ per il teorema I ■

III - *Due polinomi su un corpo* **F** *di infiniti elementi coincidono se e solo se le relative funzioni polinomiali associate coincidono*.*

Dimostrazione: Siano $\mathcal{A}(x)$ e $\mathcal{B}(x)$ due polinomi su **F**; è chiaro che se essi coincidono anche le funzioni polinomiali coincidono (cioè assumono il medesimo valore per ogni elemento di **F**). Dimostriamo il viceversa; poniamo $\mathcal{T}(x) = \mathcal{A}(x) - \mathcal{B}(x)$. Supponendo che le funzioni polinomiali associate ad $\mathcal{A}(x)$ e a $\mathcal{B}(x)$ coincidano, risulta che la funzione polinomiale associata a $\mathcal{T}(x)$ è identicamente nulla. Ma allora, per il teorema precedente, il polinomio $\mathcal{T}(x)$ è nullo, cioè i polinomi $\mathcal{A}(x)$, $\mathcal{B}(x)$ coincidono ■

Questi teoremi ci tranquillizzano: dal momento che **Q** ed **R**, che sono i corpi di piú frequente impiego, hanno infiniti elementi, negli anelli $\mathbf{Q}[x]$ ed $\mathbf{R}[x]$ un polinomio è nullo se e solo se la funzione polinomiale associata è nulla. In questi casi, dunque, non è piú importante fare una rigorosa distinzione fra polinomio e funzione polinomiale; *effettivamente* (*quando si tratta di* $\mathbf{Q}[x]$ *e di* $\mathbf{R}[x]$) *nell'uso corrente il termine polinomio ha anche il significato di funzione polinomiale.*

* Questo teorema viene di solito indicato come « principio d'identità dei polinomi ».

Riusciamo anche a darci una ragione del fatto che in $\mathbf{Z}_3$ abbiamo trovato un polinomio di terzo grado non nullo, ma con funzione polinomiale associata identicamente nulla: per « bloccare a zero » un polinomio di terzo grado abbiamo bisogno di annullarlo in 4 punti almeno, mentre $\mathbf{Z}_3$ ce ne può offrire solo tre!

I polinomi hanno importantissime applicazioni proprio attraverso le loro funzioni polinomiali. Accenniamo ad un caso tipico. Parlando della funzione coseno e della funzione seno, abbiamo detto che esse non potevano essere espresse mediante funzioni a noi già note. Esse però possono essere calcolate con buona approssimazione per mezzo di un polinomio; *ad esempio, il polinomio* $x \longrightarrow x - \frac{x^3}{6}$ *fornisce un valore della funzione* $\sin x$ (*in cui la coordinata angolare è misurata in radianti*) *approssimato per difetto a meno di* $\frac{1}{200}$ *nell'intervallo* $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ (cioè per angoli non superiori alla metà di un angolo retto). Volendo un'approssimazione migliore si può prendere un opportuno polinomio di grado piú elevato. Non possiamo, naturalmente, esporre il procedimento con cui si calcolano i coefficienti di questi polinomi. Ci basta questo cenno per capire come sia possibile che una calcolatrice (anche tascabile) fornisca in tempo brevissimo un valore approssimato delle funzioni circolari e di tante altre funzioni: la macchina non fa che calcolare i valori di un polinomio i cui coefficienti sono scritti nella sua memoria.

Esercizi

1 Costruire il polinomio di secondo grado di $\mathbf{R}[x]$ che per i valori di x : 1 , 3 , 4 assume i valori 3 , 1 , 5 , rispettivamente. (Dal punto di vista geometrico: costruire la parabola che passa per i punti $P_1 \leftrightarrow (1, 3)$, $P_2 \leftrightarrow (3, 1)$, $P_3 \leftrightarrow (4, 5)$.

* **2** Se la funzione polinomiale associata ad un polinomio $\mathcal{F}(x)$ di $\mathbf{R}[x]$ è pari [cioè tale che per ogni x : $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(-x)$], allora il polinomio contiene solo

le potenze pari. (Si dice che è un *polinomio pari*). Dimostrarlo.
Analogo risultato se la funzione polinomiale è dispari, cioè tale che, per ogni x di $\mathbf{R}$ sia: $\mathcal{T}(-x) = -\mathcal{T}(x)$.

* **3** Trovare una formula che rappresenti *tutti* i polinomi su $\mathbf{Z}_3$ che hanno la funzione associata nulla.

4 Trovare in $\mathbf{Z}_5$ un altro polinomio che abbia la stessa funzione associata del polinomio $x^3 + 2x + 1$.

* **5** Il polinomio $x^2 - 1$ ha quattro radici in $\mathbf{Z}_{15}$; trovarle. Come mai ciò non è in contraddizione con il teorema 1?

** **6** Dimostrare che ogni funzione $\mathbf{Z}_3 \to \mathbf{Z}_3$ si può ottenere come funzione polinomiale. La stessa cosa per $\mathbf{Z}_p$, con p numero primo qualsiasi.

** **7** Costruire un polinomio di terzo grado, dispari (tenere presente l'esercizio 2; un tale polinomio è del tipo $ax + bx^3$) che per $x = \frac{\pi}{2}$ assume valore 1 e per $x = \frac{\pi}{4}$ assume valore $\frac{1}{\sqrt{2}}$. (Notare che si tratta degli stessi valori assunti dalla funzione seno, quando gli angoli vengono misurati in radianti). Confrontare i valori assunti dal polinomio con quelli assunti dalla funzione seno per $x = \frac{\pi}{6}$ (corrispondente a 30°) e per $x = \frac{\pi}{3}$ (corrispondente a 60°).
(Fornire i valori di a e di b a meno di $\frac{1}{1000}$).

Alcuni importanti sviluppi algebrici

23.6 Concludiamo questo capitolo dedicato ai polinomi presentando alcuni sviluppi di polinomi particolarmente importanti.

I - Proponiamoci dapprima di sviluppare l'espressione $(x + y)^n$, dove n è un intero positivo (potenza n-sima del binomio). Sappiamo che si ha $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$; con un semplice calcolo si trova

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

L'idea buona per un procedimento di carattere generale la possiamo cogliere dal ragionamento

che abbiamo fatto studiando il calcolo delle probabilità, a proposito delle prove ripetute (nel § 6.1).

Prendiamo un problema piú generale: supponiamo di volere sviluppar l'espressione

$$(x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2) \cdot (x_3 + y_3) \cdot \ldots \cdot (x_n + y_n) \quad (7)$$

I monomi che si ottengono da questo sviluppo sono a due a due dissimili fra loro e sono in numero di 2^n. Li possiamo rappresentare tutti mediante un grafo: ad ogni cammino sul grafo corrisponde un monomio (ottenuto moltiplicando le variabili che si trovano sugli archi che compongono il cammino).

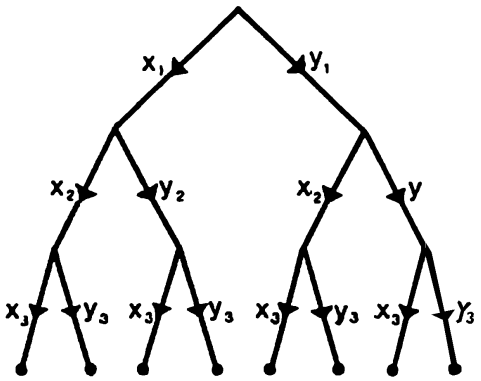


Fig. 1

Adesso supponiamo che sia

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = x$$

$$y_1 = y_2 = y_3 = \ldots = y_n = y$$

cosí che il nostro prodotto diventa $(x + y)^n$.

Allora, a motivo della proprietà commutativa della moltiplicazione, due monomi contenenti lo stesso numero di volte le variabili del tipo x_k (e quindi anche le variabili del tipo y_k) diventano simili.

Ad esempio, i due monomi $x_1 y_2 x_3$ e $y_1 x_2 x_3$ si trasformano entrambi nel monomio $x^2 y$. Il problema è allora quello di contare i monomi che diventano simili fra loro. Conviene quindi modificare il grafo facendo confluire in uno stesso vertice i cammini che corrispondono a monomi simili (vd. figura 2). Il nostro problema si riduce ad un problema già risolto: quello di *contare il numero dei cammini che arrivano ad un dato vertice in un grafo come quello della figura 2.*

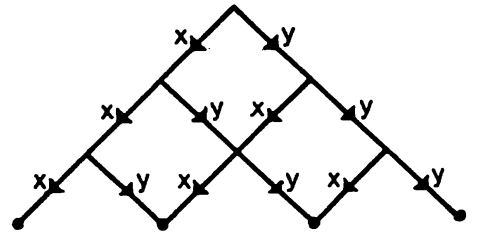


Fig. 2

Possiamo concludere cosí: *lo sviluppo di* $(x + y)^n$ *è costituito dalla somma di tutti i monomi del tipo* $\binom{n}{k}$

$x^k y^{n-k}$ *dove i coefficienti* $\binom{n}{k}$ *sono i numeri di Pascal.*

Essi possono essere calcolati passo per passo come abbiamo fatto nel § 6.1, oppure possono essere rappresentati con le formule trovate nel § 12.4.

La formula finale è dunque la seguente:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\,y + \ldots +$$

$$+ \binom{n}{k}x^{n-k}\,y^k + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

[ricordiamo che è $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$,

$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$].

Questo è dunque lo sviluppo del binomio. Notiamo che risulta

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{k} + \ldots +$$

$$+ \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Infatti, basta porre, nello sviluppo del binomio, $x = y = 1$.

II - *Per ogni intero* $n > 0$ *vale l'uguaglianza:*

$$x^n - y^n = (x-y)\,(x^{n-1} + x^{n-2}\,y + x^{n-3}\,y^2 +$$
$$+ \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Per dimostrarla non c'è che da sviluppare l'espres-

sione a secondo membro. Può essere utile (in questo ed in altri casi analoghi) incolonnare monomi simili:

$$
\begin{array}{l}
x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + x^2y^{n-3} + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x - y \\
\hline
x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \ldots + x^3y^{n-3} + x^2y^{n-2} + xy^{n-1} \\
\quad - x^{n-1}y - x^{n-2}y^2 - \ldots - x^3y^{n-3} - x^2y^{n-2} - xy^{n-1} - y^n \\
\hline
x^n \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - y^n
\end{array}
$$

III - *Per ogni intero* $n > 0$, **dispari**, *vale l'uguaglianza*

$$x^n + y^n = (x + y)\,(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

(Nel secondo fattore, a secondo membro, il coefficiente è, alternativamente, $+1$, -1, $+1$, $-1 \ldots$). La dimostrazione si fa come nel caso precedente, e la lasciamo per esercizio al lettore.

Vocaboli e simboli

forma canonica di un polinomio
monomio, coefficiente di un monomio
grado di un monomio, di un polinomio
$\mathbf{F}[x]$, $\mathbf{F}[x, y]$ anello dei polinomi nella **variabile** x (nelle variabili x, y risp.) sul corpo $\mathbf{F}$
radice di un polinomio
polinomi **riducibili**, polinomi **irriducibili**
ordinamento per divisibilità, nei polinomi
funzione polinomiale

Esercizi

1 Calcolare $(3x^2 + 2y)^5$, $(x^4 - y^4)^6$.

* **2** Sviluppare $(x + y)^5$ dove $x + y$ è inteso come polinomio su $\mathbf{Z}_5$.

** **3** Dimostrare che un polinomio di due variabili *sul corpo reale* è nullo se la sua funzione associata è nulla. (In altre parole, in $\mathbf{R}[x, y]$ vale il «principio di identità»).

* **4** Si consideri un'applicazione di $\mathbf{R}^2$ in sé della forma

$$x' = a_1 x + b_1 y$$
$$y' = a_2 x + b_2 y$$

Quale relazione deve sussistere fra i coefficienti a_1, b_1, a_2, b_2 perché questa rappresenti un'isometria?

5 Dimostrare le seguenti relazioni tra polinomi su $\mathbf{R}$:

$$a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c + 2d)^2 =$$
$$= (a + b + d)^2 + (a + c + d)^2 + (b + c + d)^2 + d^2 =$$
$$= (a + d)^2 + (b + d)^2 + (c + d)^2 + (a + b + c + d)^2$$

24

I numeri complessi

I numeri complessi (con disinvoltura)

24.1 Abbiamo già avuto occasione di riflettere che un'equazione priva di soluzioni in un certo insieme può divenire risolubile se ambientata in un insieme piú ampio. Ad esempio, abbiamo constatato che l'equazione $x^2 - 2 = 0$ non ha soluzioni in $\mathbf{Q}$, mentre ha soluzioni in $\mathbf{R}$. Consideriamo ora l'equazione $x^2+1 = 0$, cioè $x^2 = -1$. Essa non ha soluzioni in $\mathbf{R}$ per la buona ragione che i quadrati dei numeri reali sono numeri non negativi; possiamo aggiungere che anche l'intuizione contribuisce a metterci il cuore in pace perché, tracciata la parabola $y = x^2 + 1$, si vede bene che essa non taglia l'asse $\mathfrak{X}$. Tuttavia, i matematici si sono domandati da tempo * se non era possibile passare dalla retta reale ad un campo numerico piú vasto, in cui potesse esistere anche la radice quadrata di -1.

Non sempre, in matematica, esiste ciò che si vorrebbe esistesse: anche la matematica ha i suoi sogni proibiti. Tuttavia l'esistenza degli enti matematici non deve avere necessariamente riscontro nella realtà esterna: il matematico può lasciare libera la sua fantasia e portare a termine le sue costruzioni. L'unico ostacolo che può trovare, tale

* Occorre precisare che, storicamente, l'introduzione dei numeri complessi non avvenne per l'esigenza di voler trovare ad ogni costo la radice quadrata di -1 (come abbiamo detto, l'intuizione geometrica ci rende rassegnati a riguardo), ma avvenne per uno strano imbroglio provocato dalla formula risolutiva dell'equazione di terzo grado. Peccato che per ora non possiamo entrare nei dettagli di questa vicenda.

da far crollare tutta la costruzione, è l'accorgersi di una contraddizione, cioè di un'affermazione incompatibile con un'affermazione già ammessa o dimostrata (ad esempio, l'affermazione $-1 > 0$). Il bello è che, in generale, anche le costruzioni piú fantasiose dei matematici, purché coerenti (cioè prive di contraddizioni), finiscono per avere un impressionante riscontro nella realtà esterna...

In questo paragrafo vogliamo seguire questo atteggiamento che abbiamo detto fantasioso: ammettiamo dunque che esista, accanto ai consueti numeri reali, un nuovo ente, che indicheremo con i, tale che $i^2 = -1$, ovvero

$$i^2 + 1 = 0 \qquad (1)$$

Naturalmente, noi vogliamo che il nuovo ente si possa sommare e moltiplicare con i vecchi numeri reali, ed anche con se stesso, in modo che le solite proprietà formali [esattamente: le 1) ... 7) e 9)] continuino a valere. In altre parole, si dovranno poter costruire espressioni contenenti la lettera i, cosí come nel capitolo precedente abbiamo imparato a costruire i polinomi a partire dalle espressioni atomiche consistenti in numeri o in lettere. Quindi espressioni come

$$2 + 3i \quad , \quad 1 + 2i - i^3 \quad , \quad i + i^4 \quad , \quad \sqrt{2} + i$$

saranno pienamente legittime: tutto come nel discorso dei polinomi. Ma ora c'è una grossa novità: la relazione (1). Essa permette di ricavare tutte le potenze di i.

Infatti

$$i^2 = -1 \quad , \quad i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1$$

Se proseguiamo nelle potenze, i valori si ripetono:

$i^5 = i^4 \cdot i = i \quad , \quad i^6 = i^4 \cdot i^2 = i^2 = -1$

$i^7 = i^4 \cdot i^3 = i^3 = -i \quad , \quad i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$

Dunque, le potenze di i si ripetono con un periodo di 4.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
i^n	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	...

Un'importante conseguenza di questa scoperta è che i nostri polinomi in i si riducono in modo drastico: *essi possono essere scritti come polinomi di grado non superiore al primo cioè possono essere messi nella forma*

$$x + iy \qquad (2)$$

dove x ed y sono numeri reali. Infatti, ad esempio, si ha

$$1 + 2i - i^3 = 1 + 2i - (-i) = 1 + 2i + i = \\ = 1 + 3i$$

analogamente

$$1 + i^4 = 1 + 1 = 2$$

Facciamo anche un'osservazione — di buon auspicio — che per ora accantoniamo: *i ha un reciproco; infatti $i\,(-i) = -i^2 = 1$; perciò il reciproco di i è $-i$.*

Le espressioni del tipo (2) vengono dette **numeri complessi** *, i numeri reali x ed y vengono detti **parte reale e parte immaginaria**, rispettivamen-

* Il termine « numero complesso » è usato con tutt'altro significato in certe questioni elementari (es.: nella misura del tempo in ore, primi, secondi...). A motivo della diversità dei significati, non sono possibili equivoci.

te, del numero $x + iy$. Il numero i viene detto **unità immaginaria**. Notiamo, in primo luogo, che si ha $x + iy = 0$ quando e soltanto quando è $x = y = 0$. Infatti, se fosse $y \neq 0$ si avrebbe $i = -\frac{x}{y}$: ma allora i sarebbe un numero reale, cosa che noi dobbiamo escludere. Quindi deve essere $y = 0$, e, pertanto, $x = 0$. Se poi due numeri complessi sono uguali, essi hanno uguale la parte reale e la parte immaginaria. Vediamo perché: se è

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$$

si ricava

$$(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) = 0$$

e, per quello che abbiamo appena detto, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Vediamo ora come si comportano i numeri complessi nelle operazioni algebriche.

Addizione: Siano $x + iy$, $u + iv$ due numeri complessi; calcolando si ricava

$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v) \qquad (3)$$

Moltiplicazione: si ricava

$$(x + iy) \cdot (u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu) \qquad (4)$$

(Ricordare sempre che $i^2 = -1$). *Si verifica immediatamente che il numero complesso* $1 = 1 + i0$ *è elemento neutro per la moltiplicazione.*

Naturalmente, per queste operazioni valgono le proprietà 1) ... 7) e 9) perché proprio su queste abbiamo costruito il calcolo dei polinomi, da cui siamo partiti. Tutt'al piú può restare il dubbio

che la relazione (1) abbia portato una contraddizione nel nostro edificio... Comunque, se proseguiamo con coraggio vediamo che tutto torna bene, anzi sussiste questa proprietà insperata:

Ogni numero complesso non nullo ha un reciproco.

Per dimostrare la nuova proprietà, supponiamo che sia $u + iv \neq 0$ (e quindi uno almeno dei due numeri reali u, v sia diverso da zero). Cerchiamo un numero $x + iy$ tale che $(u + iv) \cdot (x + iy) = 1$, cioè

$$(ux - vy) + i\,(vx + uy) = 1 \tag{5}$$

Come abbiamo detto, due numeri complessi sono uguali quando sono uguali le parti reali e le parti immaginarie. Dall'uguaglianza (5) otteniamo dunque le due seguenti uguaglianze fra numeri reali:

$$\begin{cases} ux - vy = 1 \\ vx + uy = 0 \end{cases} \tag{6}$$

si tratta di vedere se questo sistema lineare nelle incognite x, y ha soluzione. (Rivedere il § 17.4). L'espressione $\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix} = u^2 + v^2$ ha certamente valore positivo perché almeno uno dei due numeri reali u, v è diverso da zero, perciò il sistema ha un'unica soluzione che si può esprimere così:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -v \\ 0 & u \end{vmatrix}}{u^2 + v^2} = \frac{u}{u^2 + v^2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} u & 1 \\ v & 0 \end{vmatrix}}{u^2 + v^2} = \frac{-v}{u^2 + v^2} \tag{7}$$

il reciproco di $u + iv$ si può anche trovare (una volta ammessa la sua esistenza) così:

$$\frac{1}{u+iv} = \frac{1}{u+iv}\,\frac{u-iv}{u-iv} =$$

$$= \frac{u-iv}{u^2-(iv)^2} = \frac{u-iv}{u^2+v^2}$$

Riconosciamo da questa espressione che, indicando con $x + iy$ il reciproco di $u + iv$, valgono appunto le (7).

Concludendo, per i numeri complessi, oltre alle proprietà 1) ... 7) e 9) vale anche la 8). Dunque:

L'insieme dei numeri complessi, con la struttura algebrica in esso introdotta, è un corpo, che indicheremo con **C**.

Così abbiamo ottenuto un'estensione molto significativa da **R** a **C**, con conservazione di tutte le proprietà algebriche. Tuttavia, nel passare da **R** a **C**, qualcosa abbiamo perso: la struttura di ordine, o, almeno, la possibilità di definire una struttura di ordine soddisfacente alle due relazioni di compatibilità con l'addizione e con la moltiplicazione. (Cfr. § 10.2: aggiungendo ad ambo i membri uno stesso numero, oppure moltiplicando ambo i membri per uno stesso numero > 0, la relazione di ordine si conserva). In altre parole: *se noi volessimo aggiungere alle proprietà algebriche già formulate [compresa la* (1)*] gli assiomi dell'ordinamento totale, con le relazioni di compatibilità ora richiamate, cadremmo in una contraddizione.* Infatti, supponiamo che sia $i > 0$; allora moltiplicando ambo i membri per i si ottiene $i^2 > 0$, cioè $-1 > 0$. Supponendo invece $i < 0$, moltiplicando per i, si otterrebbe (dovendo cambiare il verso della disuguaglianza) $i^2 > 0$, cioè ancora $-1 > 0$ *.

* La relazione $-1 > 0$ è ovviamente falsa in **R**. Dalle proprietà delle strutture d'ordine compatibili con l'addizione e la moltiplicazione si deduce che in ogni caso si ha $-1 < 0$. (Dimostrarlo per esercizio).

Questa impossibilità di una relazione di ordine, cioè impossibilità di mettere i numeri complessi « in fila », acuisce la nostra curiosità di trovare un modello intuibile per il corpo **C**, cosa che faremo nel § 24.3.

Esercizi

1 Calcolare:

$$[(i+1)^2-2i]\cdot(i+1)\,(i-1)+1 \quad , \quad \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7$$

2 Calcolare le successive potenze del numero complesso $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}$.

3 Calcolare:

$$\frac{1+i}{1-i} \quad , \quad \frac{1}{\frac{1}{i-1}+\frac{1}{i+1}} \quad , \quad \frac{1}{(2-i)\,(1-3i)}$$

4 Trovare i numeri complessi z tali che $z^2 = i$.
(Naturalmente, porre $z = x + iy \ldots$) .

5 Calcolare: $(1+i)^8$, $(1-i)^3$.

** **6** Calcolare: $i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + 5i^5 + \ldots + 99i^{99} + 100i^{100}$.

I numeri complessi (con i puntini sulle i...)

* **24.2** Questo paragrafo è destinato a coloro che amano andare a fondo nelle cose di cui si occupano (e, in particolare, nello studio della matematica). Lo scopo che ci proponiamo è quello di porre su basi un po' piú solide l'introduzione dei numeri complessi, cosí da convincerci che nella nostra costruzione non ci possono essere contraddizioni.

Nel paragrafo precedente siamo partiti introducendo i polinomi nella variabile i, poi siamo arrivati ad un punto nodale: quello in cui ci siamo ritenuti autorizzati a sostituire, anche piú volte, i^2 con -1. Possiamo ora introdurre un procedi-

mento che dia a questa operazione un carattere piú consueto e piú accettabile? Prendiamo spunto da un esempio particolare. Consideriamo il polinomio in i:

$$3i^3 - 2i^2 + 5i + 1 \qquad (8)$$

Per eliminare le potenze di i superiori alla prima, possiamo procedere sistematicamente aggredendo il monomio di grado piú alto; possiamo scrivere $3i^3 = 3i \cdot i^2$, quindi sostituire i^2 con -1. Il nuovo polinomio sarà

$$-2i^2 + 2i + 1 \qquad (9)$$

A questo punto viene spontanea la seguente importante osservazione: *l'operazione di sostituzione di* $3i^3$ *con* $-3i$ *può essere descritta come operazione di sottrazione del termine* $3i(i^2 + 1)$. Infatti si ha

$$3i^3 - 2i^2 + 5i + 1 - 3i\,(i^2 + 1) =$$
$$= -2i^2 - 3i + 5i + 1 = -2i^2 + 2i + 1$$

Ma questa operazione di sottrazione non è altro che il primo passo che si compie quando si esegue la divisione con resto del polinomio (8) per il polinomio $i^2 + 1$. La divisione può proseguire cosí:

$$-2i^2 + 2i + 1 + 2\,(i^2 + 1) = 2i + 3$$

Vediamo come possono andare le cose in generale: consideriamo un qualsiasi polinomio in i:

$$\mathcal{A}(i) = a_n i^n + a_{n-1}\, i^{n-1} + a_{n-2}\, i^{n-2} + \ldots + a_1 i + a_o \qquad (10)$$

Il primo passo della divisione per $i^2 + 1$ è il seguente:

$$\begin{array}{lll} a_n i^n + a_{n-1} i^{n-1} + a_{n-2} i^{n-2} + \ldots + a_1 i + a_0 & & \\ -a_n i^n \quad - a_n i^{n-2} & | & i^2 + 1 \\ \hline a_{n-1} i^{n-1} + (a_{n-2} - a_n) i^{n-2} + \ldots + a_1 i + a_0 & | & a_n i^{n-2} \end{array}$$

Si vede allora che il primo resto parziale è lo stesso polinomio che si ottiene sostituendo un fattore i^2 con -1 nel termine di grado piú alto del polinomio $\mathcal{A}(i)$. L'ultimo resto parziale (cioè quello che chiamiamo senz'altro resto) non è altro che il polinomio che si ottiene sostituendo i^2 con -1 tutte le volte che è possibile. Il risultato della divisione si esprime cosí:

$$\mathcal{A}(i) = (i^2 + 1)\ \mathfrak{Q}(i) + (x + iy)$$

Questa uguaglianza ci dice che il polinomio $\mathcal{A}(i)$ differisce dal resto $x + iy$ per un multiplo del polinomio $i^2 + 1$. Viene in mente allora di imitare i ragionamenti che abbiamo fatto a proposito delle classi di resti modulo un intero m; nel nostro caso il ruolo dell'intero m sarà svolto dal polinomio $i^2 + 1$. Cominciamo con l'introdurre una relazione di equivalenza in questo modo:

dati due polinomi $\mathcal{A}(i)$, $\mathcal{B}(i)$, *la relazione* $\mathcal{A}(i) \sim \mathcal{B}(i)$ *significa che* $\mathcal{A}(i) - \mathcal{B}(i)$ *è un multiplo di* $i^2 + 1$, *cioè esiste un polinomio* $\mathfrak{Q}(i)$ *tale che* $\mathcal{A}(i) - \mathcal{B}(i) = (i^2 + 1)\ \mathfrak{Q}(i)$.

È evidente che questa è una relazione di equivalenza, cioè gode delle proprietà: riflessiva, simmetrica, transitiva.

L'insieme $\mathbf{R}[i]$ (insieme dei polinomi in i a coefficienti reali) viene ripartito in classi di equivalenza. In ogni classe di equivalenza vi è un polinomio $x + iy$, di grado non superiore al primo.

Questo polinomio è unico perché se ve ne fossero due diversi, essi (essendo in una stessa classe di equivalenza) dovrebbero differire per un multiplo non nullo di $i^2 + 1$, cioè per un polinomio di grado $\geqslant 2$, cosa che è impossibile.

Effettivamente, le cose vanno perfettamente come nel caso delle classi di resti mod m (m intero > 0); come abbiamo visto, per ogni classe di resti mod m si può prendere un unico rappresentante compreso fra 0 ed $m - 1$: analogamente, nell'insieme delle classi di equivalenza di $\mathbf{R}[i]$ modulo $i^2 + 1$ possiamo prendere un rappresentante di grado non superiore al primo. Una classe di equivalenza può essere identificata con il suo unico rappresentante del tipo $x + iy$. *Quindi le nostre classi di equivalenza non sono altro che i* **numeri complessi.**

Si tratta ora di vedere se fra queste classi di equivalenza in cui viene ripartito $\mathbf{R}[i]$ si possono introdurre in modo naturale le operazioni algebriche. Non resta che da imitare il modello delle classi di resti modulo m (nel § 19.6 abbiamo svolto con tutti i dettagli il caso $m = 6$); per dimostrare che l'addizione e la moltiplicazione in $\mathbf{Z}_m$ si possono definire in modo coerente, occorreva dimostrare che la classe-risultato di un'operazione non dipende dal rappresentante scelto nella classe degli operandi. Come abbiamo visto, la dimostrazione di questa coerenza delle operazioni si fondava sul fatto che l'insieme dei multipli di un intero m è un **ideale** di $\mathbf{Z}$, cioè è un sottoanello chiuso rispetto alla moltiplicazione per un elemento qualsiasi di $\mathbf{Z}$ *.

A questo punto, scopriamo una perfetta analogia al caso che ci interessa ora:

l'insieme dei multipli di $i^2 + 1$, *cioè l'insieme*

* Si usa dire che un insieme T è *chiuso* rispetto ad una certa operazione, se, eseguendo questa operazione, si trova ancora un elemento di T. Ad esempio, in $\mathbf{Z}$ l'insieme degli interi positivi è chiuso rispetto all'addizione, ma non rispetto alla sottrazione.

$\mathfrak{J}(i^2 + 1) = \{(i^2 + 1)\ \mathfrak{Q}(i)\}$

è un ideale in $\mathbf{R}[i]$.

È facile verificare che sommando e moltiplicando due polinomi multipli di $i^2 + 1$ si ottiene ancora un multiplo di $i^2 + 1$. Anche l'operazione di «opposto», applicata ad un multiplo di $i^2 + 1$, ci ridà un multiplo di $i^2 + 1$. Per verificare che $\mathfrak{J}(i^2 + 1)$ è un ideale, resta da vedere che cosa succede quando si moltiplica un suo elemento cioè un polinomio del tipo $(i^2 + 1)\ \mathfrak{Q}(i)$ per un polinomio qualsiasi $\mathfrak{S}(i)$:

$$[(i^2 + 1)\ \mathfrak{Q}(i)]\ \mathfrak{S}(i) = (i^2 + 1)\ [\mathfrak{Q}(i)\ \mathfrak{S}(i)]$$

È evidente che si è ancora ottenuto un multiplo di $i^2 + 1$. Siamo dunque sicuri — facendo gli stessi calcoli che abbiamo fatto nel § 19.6 — di poter definire le operazioni di addizione e moltiplicazione per le nostre classi di equivalenza, ritrovando le solite proprietà 1), 2) ... 7) e 9).

Dunque i numeri complessi costituiscono un anello commutativo con unità; possiamo dire qualcosa di piú?

Ricordiamo che *l'anello* $\mathbf{Z}_m$ *è un corpo quando e solamente quando m è un numero primo* (rivediamo la dimostrazione, sempre nel § 19.6). La nozione analoga a quella di numero primo è quella di *polinomio irriducibile*: ora il polinomio $i^2 + 1$ è irriducibile in $\mathbf{R}[i]$.

(Se lo si potesse spezzare nel prodotto di due fattori di primo grado in $\mathbf{R}[i]$, l'equazione $i^2 + 1 = 0$ avrebbe una soluzione in $\mathbf{R}$).

Vediamo allora se si può imitare il procedimento seguito (nel § 19.6) per dimostrare che un elemento

non nullo in $\mathbf{Z}_p$, con p numero primo, ha un reciproco.

Sia $u + iv$ il numero complesso non nullo (da pensare come rappresentante della sua classe). Si tratta di vedere se ha soluzione l'equazione

$$[(u + iv)] \cdot [\mathfrak{T}(i)] = [1] \qquad (11)$$

dove con la parentesi quadra si indica la classe di equivalenza, e $\mathfrak{T}(i)$ è il polinomio cercato. La relazione equivale alla seguente:

$$(u + iv)\ \mathfrak{T}(i) + (i^2 + 1)\ \mathfrak{Q}(i) = 1 \qquad (12)$$

Infatti la (11) ci dice che il polinomio $(u + iv)\ \mathfrak{T}(i)$ deve differire dal polinomio 1 per un multiplo di $i^2 + 1$.

Per dimostrare che si possono trovare due polinomi $\mathfrak{T}(i)$ e $\mathfrak{Q}(i)$ tali che valga la (12) abbiamo a disposizione due vie. La prima consiste nel notare che, essendo $i^2 + 1$ irriducibile, i *polinomi* $u + iv$, $i^2 + 1$ *sono primi fra loro* e perciò il massimo comun divisore è 1. Il teorema II del paragrafo 23.4 ci assicura allora che il massimo comun divisore può essere ottenuto come « combinazione lineare » dei due polinomi in questione: in altre parole, si possono trovare due polinomi $\mathfrak{T}(i)$ e $\mathfrak{Q}(i)$ tali che valga la (12).

La seconda via è piú elementare e consiste nel fare un piccolo calcolo per trovare direttamente $\mathfrak{T}(i)$ e $\mathfrak{Q}(i)$. Cerchiamo $\mathfrak{T}(i)$ fra i polinomi di primo grado e $\mathfrak{Q}(i)$ fra i polinomi di grado 0, cioè fra le costanti; scriviamo dunque $\mathfrak{T}(i) = x + iy$ e $\mathfrak{Q}(i) = k$.

La (12) allora diventa

$$(u + iv) \cdot (x + iy) + k(i^2 + 1) = 1$$

cioè

$$(ux + k) + i\,(uy + vx) + i^2\,(vy + k) = 1$$

da cui $ux + k = 1$, $uy + vx = 0$, $vy + k = 0$. Sostituendo il valore di k dato dalla prima relazione nella terza, troviamo il sistema

$$\begin{cases} ux - vy = 1 \\ vx + uy = 0 \end{cases}$$

e questo coincide con il sistema (7).

In conclusione, considerando i numeri complessi come classi di resti di $\mathbf{R}[i]$ rispetto all'ideale $\mathfrak{J}(i^2 + 1)$, abbiamo dimostrato in modo rigoroso che essi costituiscono un *corpo*.

Esercizi

* **1** Imitando il procedimento seguito in questo paragrafo per costruire il corpo complesso a partire da $\mathbf{R}$, costruire, a partire da $\mathbf{Q}$, un corpo contenente la radice quadrata di 2. (Naturalmente, conosciamo già il corpo dei numeri reali, o scatole cinesi, ma noi vogliamo aggiungere a $\mathbf{Q}$ meno elementi che è possibile . . .).

* **2** Dimostrare che il polinomio $i^2 + 1$ è irriducibile in $\mathbf{Z}_3$ e studiare il corpo che si ottiene partendo da $\mathbf{Z}_3$, con il procedimento seguito in questo paragrafo.

La rappresentazione dei numeri complessi nel piano

24.3 Arrivati a questo punto, è naturale cercare una rappresentazione dei numeri complessi su cui la nostra intuizione possa far presa. *Un numero complesso dipende da una* **coppia** *di numeri reali*, come ci dice la scrittura $z = x + iy$; è spontaneo allora rappresentare i numeri complessi con i punti di un piano riferito ad un sistema cartesiano. Precisamente, il *numero complesso* $z = x + iy$ *si rappresenta mediante il punto* $P \leftrightarrow (x, y)$.

Quando ci si riferisce alla rappresentazione piana dei numeri complessi, l'asse $\mathfrak{X}$ viene detto **asse reale**, l'asse $\mathfrak{Y}$ **asse immaginario**. Per giudicare della bontà di questa rappresentazione, dobbiamo vedere come vengono tradotte le operazioni. Cominciamo con l'addizione. Siano $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$; ricordando che la i deve essere trattata come la variabile di un polinomio, si ha $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$. Ciò vuol dire che la somma di due numeri complessi si fa allo stesso modo con cui si sommano i vettori del piano (rivedere il § 16.4). Geometricamente i numeri complessi z_1 , z_2 vengono visti come vettori, che si sommano con la consueta regola del parallelogrammo. Di conseguenza possiamo dare un significato geometrico all'applicazione $z \to w + z$, dove w è un numero complesso fissato. Evidentemente, essa è una **traslazione.**

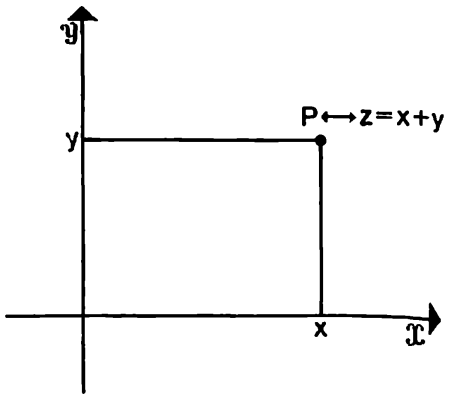


Fig. 1

Prima di parlare della rappresentazione del prodotto di due numeri complessi, dobbiamo introdurre la nozione di modulo di un numero complesso.

Posto $z = x + iy$, si dice **modulo** di z il numero (reale, non negativo) $\sqrt{x^2 + y^2}$; esso viene indicato con $|z|$. Il modulo di z , perciò, non è altro che il modulo del vettore z , cioè la distanza del punto $P \leftrightarrow (x, y)$ dall'origine. È interessante l'espressione della distanza fra due punti del piano ottenuta per mezzo del modulo: siano $P_1 \leftrightarrow z_1 = x_1 + iy_1$, $P_2 \leftrightarrow z_2 = x_2 + iy_2$ due punti del piano. Osserviamo che si ha $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$; allora risulta

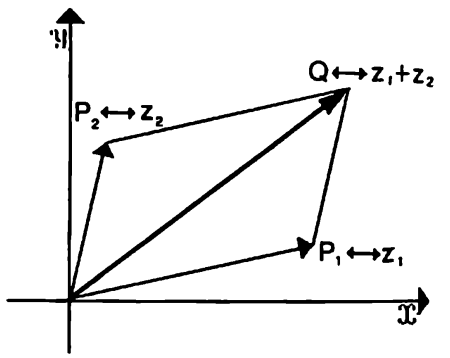


Fig. 2

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \overline{P_1P_2} \quad (13)$$

Studiamo il comportamento del modulo nell'addizione di due numeri complessi. Vale la disuguaglianza

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (14)$$

Questa non è altro che una nuova forma della disuguaglianza triangolare. Consideriamo infatti (vd. la figura 2) il triangolo di vertici $O \leftrightarrow 0$, $P_1 \leftrightarrow z_1$, $Q \leftrightarrow z_1 + z_2$; si ha $\overline{OQ} = |z_1 + z_2|$, $\overline{OP_1} = |z_1|$, $\overline{P_1Q} = \overline{OP_2}$ (ricordiamo che i lati opposti di un parallelogrammo hanno uguale lunghezza); perciò $\overline{P_1Q} = |z_2|$. La (14), allora, non è altro che la disuguaglianza

$$\overline{OQ} \leq \overline{OP_1} + \overline{P_1Q}$$

La scoperta piú interessante viene dallo studio del modulo del prodotto; si ha infatti

$$|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2| \qquad (15)$$

La dimostrazione è una semplice verifica dell'uguaglianza dei quadrati. Si ha

$$z_1z_2 = (x_1 + iy_1)\,(x_2 + iy_2) =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1)$$

perciò

$$|z_1z_2|^2 = (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 =$$
$$= x^2{}_1x^2{}_2 + y^2{}_1y^2{}_2 + x^2{}_1y_2{}^2 + x^2{}_2y^2{}_1 =$$
$$= x^2{}_1\,(x^2{}_2 + y^2{}_2) + y^2{}_1\,(x^2{}_2 + y^2{}_2) =$$
$$= (x^2{}_1 + y^2{}_1)\,(x^2{}_2 + y^2{}_2) = |z_1|^2\,|z_2|^2$$

Prendendo le radici quadrate di ambo i membri si ottiene appunto la (15). Dopo avere cosí studiato le proprietà del modulo, siamo in grado di vedere come si traduce geometricamente la moltiplicazione di due numeri complessi. Cominciamo con il caso di un numero complesso di modulo 1 (o, come diremo, numero complesso **unitario**). Per l'insieme di questi numeri, che si rappresentano sul cerchio con centro nell'origine e raggio 1, sarà ragionevole usare il simbolo **U** che abbiamo già introdotto.

Fissato un numero complesso unitario u, consideriamo l'applicazione del piano in sé così definita:

$$z \longrightarrow uz \tag{16}$$

Teorema. L'applicazione definita dalla (16) *è una rotazione con centro nell'origine. Viceversa, ogni rotazione con centro nell'origine si può rappresentare con un'applicazione del tipo* (16), *dove u è un numero complesso unitario.*

Come in altri casi, dobbiamo dimostrare due implicazioni, una inversa dell'altra (ricordare il paragrafo 20.3).

I - Vogliamo dimostrare che *un'applicazione del tipo* (16) *è una rotazione.* Anzitutto vediamo che *è un'isometria, cioè che conserva le distanze.*

Siano $P_1 \leftrightarrow z_1$, $P_2 \leftrightarrow z_2$ due punti qualunque del piano. Siano P'_1 , P'_2 i loro trasformati; dunque sarà $P'_1 \leftrightarrow uz_1$, $P'_2 \leftrightarrow uz_2$. Allora, per la formula (13), abbiamo

$$\overline{P'_1P'_2} = |\, uz_2 - uz_1 \,| = |\, u(z_2 - z_1) \,| =$$

$$= |\, u \,|\ |\, z_2 - z_1 \,| = |\, z_2 - z_1 \,| = \overline{P_1P_2}$$

Dunque si tratta di un'isometria; resta da dimostrare ora che ha le proprietà particolari delle rotazioni (rivedere il § 20.2), cioè che *ha un solo punto fisso* (*l'origine*), *a meno che non sia l'identità.* Effettivamente, per $u = 1$, la (16) rappresenta l'identità; supponiamo $u \neq 1$, e cerchiamo i punti fissi. Questi sono dati, evidentemente, dalle soluzioni dell'equazione

$$uz = z$$

cioè

$$(u - 1)\ z = 0$$

Essendo $u - 1 \neq 0$, questa ha la sola soluzione $z = 0$. Così è chiaro che la (16) rappresenta una rotazione ■

II - Viceversa, sia s una rotazione con centro nell'origine O del riferimento cartesiano; essa manda la semiretta $\mathfrak{X}^+$ in una semiretta $\mathfrak{C}$, perciò manda il punto $A \leftrightarrow (1, 0)$, rappresentato dal numero complesso 1, in un punto A' rappresentato da un numero complesso u.

Consideriamo allora l'applicazione che (sempre nella rappresentazione piana dei numeri complessi da noi introdotta) si esprime così:

$$z \longrightarrow uz$$

Essa è una rotazione con centro O, per quello che abbiamo visto nella parte I, e perciò coincide con $\mathfrak{C}$, dal momento che anche essa manda la semiretta $\mathfrak{X}^+$ nella semiretta $\mathfrak{C}$. (Ricordiamo che una rotazione con centro O è assegnata quando è data la semiretta in cui viene trasformata una semiretta fissata, con origine in O) ■

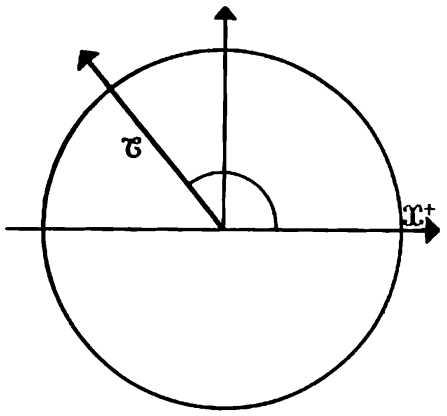


Fig. 3

Con questo teorema abbiamo fatto vedere una cosa molto interessante: *si puo porre una corrispondenza biunivoca fra il gruppo delle rotazioni e il gruppo dei numeri complessi unitari dotato della moltiplicazione come operazione di composizione interna.* Questa corrispondenza biunivoca è un *isomorfismo.* Infatti, consideriamo due rotazioni, s_1 e s_2, aventi rispettivamente le seguenti rappresentazioni:

$$z \longrightarrow u_1 z \quad , \quad z \longrightarrow u_2 z$$

essendo u_1 ed u_2 due numeri complessi unitari. Ad s_1, dunque, associamo u_1 e ad s_2 associamo u_2.

Componiamo ora queste due applicazioni. Otteniamo l'applicazione

$$z \longrightarrow u_2 (u_1 z) = (u_1 \cdot u_2)\, z$$

Dunque, alla rotazione $s_2 \circ s_1$ corrisponde il numero complesso unitario $u_1 \cdot u_2$: questo fatto ci dice appunto che la nostra corrispondenza biunivoca è un isomorfismo.

Poiché la moltiplicazione fra numeri complessi gode della proprietà commutativa, *risulta dimostrato che il gruppo delle rotazioni con centro O è abeliano* (o *commutativo*; cfr. § 21.5).

Ora siamo in grado di dare un significato geometrico all'applicazione: $z \longrightarrow wz$, essendo w un numero complesso non nullo. Evidentemente si può scrivere $w = \dfrac{w}{|w|}\, w$; il numero $\dfrac{w}{|w|}$ è unitario perché si ha $\left|\dfrac{w}{|w|}\right| = \left|\dfrac{1}{|w|}\right| |w| = \dfrac{1}{|w|}\, |w| = 1$. Allora la nostra applicazione è la composizione delle due applicazioni:

$$z \longrightarrow \frac{w}{|w|}\, z \quad , \quad z \longrightarrow |w|\, z$$

La prima è una **rotazione** con centro nell'origine, come si è visto. La seconda è un'**omotetia** con centro in O ; infatti, posto $z = x + iy$, si ha $|w|z = |w|x + i|w|y$. Come sappiamo, un'applicazione $(x, y) \longrightarrow (|w|x, |w|y)$ è un'**omotetia**, essendo $|w|$ un numero reale positivo. Dunque, ogni applicazione $z \longrightarrow wz$ (con $w \neq 0$) è una **rotoomotetia** (come si indica la composizione di una rotazione e di una omotetia con il medesimo centro; l'ordine con cui viene eseguita la composizione non ha importanza perché le due trasformazioni « commutano fra loro »).

Oltre alle rotazioni con centro O , c'è una isome-

tria che ha un particolare significato nello studio dei numeri complessi: la simmetria attorno all'asse $\mathfrak{X}$ (asse reale, come si è detto).

Sappiamo già (cfr. § 16.1) che, nel riferimento cartesiano, essa si esprime così:

$$(x, y) \longrightarrow (x, -y)$$

Con il linguaggio dei numeri complessi, essa si rappresenta così

$$x + iy \longrightarrow x - iy$$

Dato il numero complesso $z = x + iy$ si dice **complesso coniugato** di z il numero $z^* = x - iy$ (cioè il numero che ha la stessa parte reale di z; e parte immaginaria opposta). Ci sono delle ottime ragioni per dare importanza all'applicazione $z \longrightarrow z^*$; vediamole.

Supponendo che z_1 e z_2 siano numeri complessi qualsiasi, valgono le seguenti proprietà:

$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$ *(il coniugato della somma è uguale alla somma dei coniugati)*

$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$ *(il coniugato del prodotto è uguale al prodotto dei coniugati)*

In altre parole: l'operazione $z \longrightarrow z^*$ «rivolta» su se stesso il corpo dei numeri complessi in modo compatibile con le operazioni di addizione e moltiplicazione.

Ancora un'osservazione interessante: posto $z = x + iy$, si ha

$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

Dunque abbiamo un altro modo per esprimere il modulo di un numero complesso:

$$|z| = \sqrt{zz^*}$$

Esercizi

1 Come si rappresenta nel piano complesso la simmetria centrale con centro nell'origine? Come si rappresenta la simmetria attorno all'asse immaginario?

2 Rappresentare nel piano complesso le successive potenze di

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \quad , \quad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

(Si tratta di numeri complessi unitari).

3 Dire che cosa diventa il triangolo di vertici 0, $1 - i$, $1 + i$ quando si compia la trasformazione $z \longrightarrow (2 + 2i)\, z$. (Fare un disegno).

4 Studiare l'insieme dei punti z tali che $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = k$, essendo k un numero positivo fissato. (Si ricade in un problema che abbiamo già studiato nel paragrafo 18.5).

5 Tenendo presente che $zz^* = |z|^2$, dimostrare in altra forma l'identità $|z_1|^2 |z_2|^2 = |z_1 z_2|^2$.

* **6** Dimostrare che un numero complesso $w = u + iv$ diverso da 0 ha due radici quadrate, fra loro opposte. (Si tratta di risolvere l'equazione $z^2 = w$; si ponga $z = x + iy$ e si scriva il sistema che traduce questa equazione).

* **7** Dimostrare che l'applicazione $z \to uz^*$, dove u è un numero complesso unitario, rappresenta una simmetria assiale, con asse passante per l'origine.

* **8** Dimostrare che ogni isometria del piano si esprime nella forma $z \longrightarrow uz + w$, oppure $z \to uz^* + w$ dove u e w sono numeri complessi ed è $|u| = 1$.

* **9** Dimostrare che ogni similitudine del piano si rappresenta con un'applicazione del tipo $z \longrightarrow uz + w$ oppure $z \longrightarrow uz^* + w$ dove u e w sono numeri complessi, con $u \neq 0$.

* **10** Dimostrare che una similitudine propria ha un unico punto fisso. (Come si caratterizzano le similitudini proprie, nelle rappresentazioni fornite dall'esercizio precedente?).

24.4 Il risultato che esporremo in questo paragrafo è il punto d'incontro di cammini che abbiamo iniziato in campi diversi (rotazioni, angoli, numeri complessi). Se abbiamo seguito man mano quello che è stato esposto, sarà interessante — ed anche bello — veder combaciare i vari pezzi della nostra costruzione...

I - Riassumiamo i risultati già ottenuti.

Abbiamo dapprima introdotto (nel § 22.1) un sistema di coordinate (coordinate angolari) nel gruppo delle rotazioni con centro nel punto O, origine di un sistema di assi cartesiani.

L'insieme delle rotazioni con centro O, a sua volta, è stato posto in corrispondenza biunivoca con il cerchio $\mathbf{U}$ avente centro O e raggio 1.

L'insieme $\mathbf{U}$, con l'introduzione dei numeri complessi, è stato dotato di una struttura di gruppo (prendendo come operazione di composizione interna la moltiplicazione). Cosí, nel paragrafo precedente, abbiamo potuto affermare che $\mathbf{U}$ è isomorfo con il gruppo delle rotazioni.

A questo punto, possiamo dunque affermare che *esiste un'applicazione bigettiva*

$$]-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbf{U}$$

che fa corrispondere ad un numero reale α *il numero complesso unitario avente come coordinata angolare* α, *cioè* $\cos\alpha + i \sin\alpha$. *Prolunghiamo questa applicazione a tutta la retta reale per periodicità (con periodo* 2π). *Otteniamo una funzione a valori complessi, che chiameremo funzione di rotazione e che indicheremo con il simbolo* rot. *Dunque*

$$\mathrm{rot}\,\alpha = \cos\alpha + i \sin\alpha \qquad (17)$$

(ricordiamo che, nel § 22.5, abbiamo già esteso la definizione della funzione coseno e della funzione seno a tutta la retta reale mediante prolungamento per periodicità).

Per $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ il simbolo $\mathrm{rot}\,\alpha$ indica dunque la rotazione di angolo α; il simbolo $\mathrm{rot}\,\alpha$ ha un chiaro significato intuitivo anche per $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 0$ e per un numero reale α arbitrario. L'impiego dei numeri complessi ci permette di compendiare il coseno e il seno in un'unica funzione con notevole semplificazione e notevole evidenza intuitiva.

Ed ecco il risultato fondamentale che abbiamo preannunciato:

Per ogni coppia di numeri reali α, β *si ha*

$$\mathrm{rot}\,(\alpha + \beta) = \mathrm{rot}\,\alpha \cdot \mathrm{rot}\,\beta \qquad (18)$$

In altre parole: *l'applicazione* rot *fa corrispondere alla* **somma** *dei numeri reali* α, β *il* **prodotto** *dei due elementi corrispondenti in* **U**.

Notiamo che se consideriamo **R** come gruppo (con l'operazione di addizione) ed **U** come gruppo (con l'operazione di moltiplicazione), la (18) ci dice che l'*applicazione* rot *conserva i risultati delle operazioni di composizione interna* *.

Si può anche dire che la funzione rot fa corrispondere alla somma di due numeri reali α, β la rotazione che si ottiene componendo le due rotazioni corrispondenti.

La (18) può essere anche scritta

* In termine tecnico si dice che è un *omomorfismo* di **R** in **U**; notiamo che rot non è un isomorfismo (Cfr. § 21.5) perché non è un'applicazione bigettiva. (Come abbiamo visto, rot è bigettiva solo se ristretta all'intervallo $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$; per un fissato valore u di **U** vi sono in **R** infiniti valori di α tali che $\mathrm{rot}\,\alpha = u$).

$$\cos(\alpha+\beta)+i\,\sin(\alpha+\beta)=(\cos\alpha+i\,\sin\alpha)\cdot(\cos\beta+i\sin\beta)=$$
$$=(\cos\alpha\,\cos\beta-\sin\alpha\,\sin\beta)+i\,(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\sin\beta)$$

Da questa relazione, uguagliando fra loro le parti reali e le parti immaginarie, si ottengono le relazioni

$$\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\,\cos\beta-\sin\alpha\,\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\sin\beta\end{cases}\qquad(19)$$

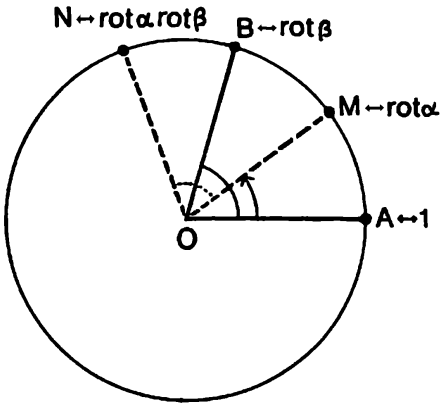


Fig. 4

Queste sono dette **formule di addizione** per il coseno e il seno.

Le considerazioni intuitive che abbiamo svolto sul significato della formula (18) (che chiameremo **formula di addizione** per la funzione di rotazione) non ci esimono dal darne una dimostrazione precisa.

II - Dimostriamo la formula (18) dapprima nel caso in cui sia

$$0<\alpha\leq\frac{\pi}{2}\ ,\quad 0<\beta\leq\frac{\pi}{2}$$

in questo caso si ha

$$\cos\alpha\geqslant 0\ ,\quad \sin\alpha>0\ ,\quad \cos\beta\geqslant 0\ ,\quad \sin\beta>0$$

Consideriamo i punti di **U**:

$$A\leftrightarrow 1\ ,\quad B\leftrightarrow \mathrm{rot}\,\beta$$

La rotazione rappresentata da $\mathrm{rot}\,\alpha$ porta questi punti, rispettivamente, nei punti

$$M\leftrightarrow \mathrm{rot}\,\alpha\ ,\quad N\leftrightarrow \mathrm{rot}\,\alpha\,\mathrm{rot}\,\beta$$

Poiché la nostra rotazione, come ogni isometria, conserva la misura degli angoli, si ha

$$\beta = \measuredangle (\widehat{AOB}) = \measuredangle (\widehat{MON})$$

Notiamo che N è un punto del semipiano $y \geqslant 0$; infatti si ha

$$N \leftrightarrow \text{rot}\,\alpha\,\text{rot}\,\beta = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \\ + i\,(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

e, nelle nostre ipotesi, risulta

$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \geqslant 0$$

La coordinata angolare di N è allora la misura dell'angolo $\widehat{AON}$. Per dimostrare la (18) basta far vedere che la coordinata angolare di N è $\alpha + \beta$, cioè

$$\measuredangle (\widehat{AON}) = \measuredangle (\widehat{AOM}) + \measuredangle (\widehat{MON})$$

L'unica cosa che resta da dimostrare è che il punto M è *interno* all'angolo $\widehat{AON}$.

A questo scopo, ci è utile il teorema I del paragrafo 20.3 (quel famoso teorema un po' ostico, ma effettivamente importante).

Vediamo come sono le proiezioni dei punti M ed N sull'asse $\mathfrak{x}$, cioè le parti reali dei numeri complessi $\text{rot}\,\alpha$ e $\text{rot}\,\alpha\,\text{rot}\,\beta$, rispettivamente.

La parte reale di $\text{rot}\,\alpha$ è $\cos\alpha$.

La parte reale di $\text{rot}\,\alpha\,\text{rot}\,\beta$ è

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Essendo $\sin\alpha > 0$, $\sin\beta > 0$, $\cos\alpha \geq 0$, $\cos\beta < 1$, risulta:

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta < \cos\alpha\cos\beta \leq \cos\alpha$$

Questa disuguaglianza ci dice che $\mathcal{M}$ è interna all'angolo $(\mathfrak{X}^+, \mathcal{N})$ e così la dimostrazione è conclusa, nel caso particolare

$$0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \quad , \quad 0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

È poi evidente che la (18) vale quando è $\alpha = 0$, oppure $\beta = 0$, essendo $\mathrm{rot}\ 0 = 1$.

III - Resta da compiere l'estensione della formula (18) al caso di α e β qualsiasi. Questa estensione non presenta difficoltà sostanziale; esige solo un po' di cura nel distinguere alcuni casi. La tecnica è analoga a quella usata nel cap. 22 per estendere le formule (4), (5), (6) e (7) a tutta la retta reale.

Procederemo per due passi successivi:

a) *estensione al caso*

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

b) *estensione al caso di* α *e* β *qualsiasi.*

Punto a). Dobbiamo premettere una relazione interessante:

$$\mathrm{rot}(-\alpha) = (\mathrm{rot}\,\alpha)^* = \frac{1}{\mathrm{rot}\,\alpha} \qquad (20)$$

La prima uguaglianza dice semplicemente che i punti rappresentativi di $\mathrm{rot}\,(-\alpha)$ e di $\mathrm{rot}\,\alpha$ sono

simmetrici rispetto all'asse reale; è quello che dicono anche le formule (4) del cap. 22. La seconda uguaglianza è contenuta nell'osservazione finale del paragrafo precedente, dove si è detto che il reciproco di un numero complesso unitario è uguale al suo coniugato.

Cominciamo dunque col supporre α e β entrambi negativi. Allora $-\alpha$ e $-\beta$ sono positivi e rientrano nel campo di validità della (18). Perciò

$$\operatorname{rot}(-\alpha-\beta)=\operatorname{rot}(-\alpha)\ \operatorname{rot}(-\beta)$$

da cui

$$\frac{1}{\operatorname{rot}(\alpha+\beta)}=\frac{1}{\operatorname{rot}\alpha}\ \frac{1}{\operatorname{rot}\beta}$$

$$\operatorname{rot}(\alpha+\beta)=\operatorname{rot}\alpha\ \operatorname{rot}\beta$$

che è ancora la (18), ma con un campo di validità piú ampio. Supponiamo poi $\alpha>0$, $\beta<0$ ed $\alpha+\beta>0$; allora risulta $0<\alpha+\beta\leq\frac{\pi}{2}$, $0<-\beta$. Perciò i numeri $\alpha+\beta$ e $-\beta$ rientrano nel campo di validità delle (18). Allora

$$\operatorname{rot}(\alpha+\beta-\beta)=\operatorname{rot}(\alpha+\beta)\ \operatorname{rot}(-\beta)$$

cioè

$$\operatorname{rot}\alpha=\operatorname{rot}(\alpha+\beta)\ \frac{1}{\operatorname{rot}\beta}$$

Da questa si ottiene ancora la (18); se fosse $\alpha+\beta<0$, basterebbe considerare i numeri $\alpha+\beta$, $-\alpha$, entrambi negativi, e ripetere i passaggi di prima.

Punto b). Per passare al caso di α e β qualsiasi, teniamo presente la formula

$$\text{rot}\,(\alpha + \tfrac{\pi}{2}) = -\,\text{rot}\,\alpha \qquad (21)$$

Questa traduce il fatto che i punti rappresentativi di rot α e rot $(\alpha + \frac{\pi}{2})$ sono simmetrici rispetto all'origine; la si può dedurre immediatamente dalle formule (6) del cap. 22.

Ora, preso un numero reale α, consideriamo l'insieme $\{\alpha + k\frac{\pi}{2}\}$ dove k è un intero relativo qualsiasi: si tratta di numeri reali che si seguono a distanza di $\frac{\pi}{2}$; perciò uno di essi sarà contenuto nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ che ha ampiezza $\frac{\pi}{2}$. Indichiamo questo con α': allora $\alpha' = \alpha + k\frac{\pi}{2}$, essendo k intero; analogamente, esiste un β' nello stesso intervallo tale che $\beta' = \alpha + l\frac{\pi}{2}$ essendo l un intero relativo. Dalla dimostrazione svolta nel punto a) si ha che

$$\text{rot}\,(\alpha' + \beta') = \text{rot}\,\alpha'\ \text{rot}\,\beta' \qquad (22)$$

D'altra parte

$$\text{rot}\,(\alpha' + \beta') = \text{rot}\,(\alpha + \beta + (k + l)\tfrac{\pi}{2}) =$$
$$= (-1)^{k+l}\ \text{rot}\,(\alpha + \beta)$$

$$\text{rot}\,(\alpha')\ \text{rot}\,(\beta') = \text{rot}\ (\alpha + k\tfrac{\pi}{2})\ \text{rot}\,(\beta + l\tfrac{\pi}{2}) =$$
$$= (-1)^{k}\ \text{rot}\,(\alpha)\ (-1)^{l}\ \text{rot}\,(\beta) =$$
$$= (-1)^{k+l}\ \text{rot}\,(\alpha)\ \text{rot}\,(\beta)$$

Sostituendo le espressioni di rot $(\alpha' + \beta')$ e di rot (α') rot (β') nella (22) e semplificando, si ottiene ancora la (18).

Cosí abbiamo completato la dimostrazione della « formula di addizione » ■

IV - Vediamo come la « formula di addizione » può essere applicata alla teoria stessa dei numeri complessi.

Sia z un numero complesso; si può scrivere $z = |z| \frac{z}{|z|}$. Il numero complesso $\frac{z}{|z|}$ ha modulo uguale a 1, perciò esiste un numero reale α tale che $\frac{z}{|z|} = \text{rot}\,\alpha$. Si può allora scrivere

$$z = |z| \text{ rot}\,\alpha = |z| (\cos\alpha + i \sin\alpha) \qquad (23)$$

Questa viene detta **forma trigonometrica** nel numero complesso z. L'operazione con cui abbiamo espresso un numero complesso in forma trigonometrica coincide nella sostanza con il passaggio a coordinate polari, che abbiamo compiuto nel § 22.1. Il numero reale non negativo $|z|$ è detto, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, **modulo** di z; il numero α è detto **argomento**; esso è unico se si pone la condizione $-\pi < \alpha \leq \pi$; se non si pone alcuna limitazione i valori possibili sono infiniti: $\alpha + 2k\pi$, essendo k un intero relativo arbitrario.

Siano ora assegnati due numeri complessi z_1, z_2 in forma trigonometrica:

$$z_1 = |z_1| \text{ rot}\,\alpha_1 = |z_1| (\cos\alpha_1 + i \sin\alpha_1)$$
$$z_2 = |z_2| \text{ rot}\,\alpha_2 = |z_2| (\cos\alpha_2 + i \sin\alpha_2)$$

Il loro prodotto è dato, per la formula di addizione, da

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \, |z_2| \text{ rot}\,(\alpha_1 + \alpha_2) =$$
$$= |z_1| \, |z_2| \, [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$$

Dunque, *il prodotto di due numeri complessi ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti.*

V - Nel paragrafo 20.4 abbiamo dato la definizione di poligono regolare e abbiamo aggiunto che per ogni intero $n \geq 3$ si possono costruire poligoni regolari di n lati. Questo fatto è del tutto intuitivo: infatti l'idea che sorge spontanea è quella di dividere l'« angolo giro » in n parti uguali. Veramente, noi non abbiamo dato diritto di cittadinanza all'angolo giro (perché è troppo importante, nella nostra esposizione, avere a che fare sempre con angoli convessi); nessuno però ci vieta di considerare la *rotazione* di argomento $\frac{2\pi}{n}$ e le sue potenze.

Poniamo dunque $z = \text{rot}\,\frac{2\pi}{n}$ e consideriamo l'insieme dei numeri complessi

$$\{1, z, z^2, z^3, \ldots, z^{n-1}\} \tag{24}$$

È evidente che mediante la moltiplicazione per z ciascun elemento si trasforma nel successivo e l'ultimo viene trasformato nel primo; infatti

$$z^n = \text{rot}\left(\frac{2\pi}{n}\, n\right) = \text{rot}\,(2\pi) = 1$$

Indichiamo con $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ i punti rappresentativi dell'insieme (24); possiamo dunque affermare che la rotazione $z = \frac{2\pi}{n}$ porta A_0 in A_1, A_1 in A_2, $\ldots$, A_{n-1} in A_0.

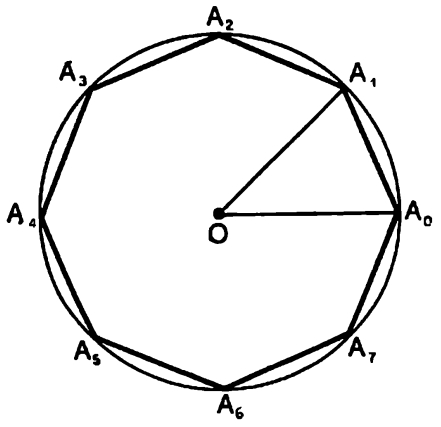


Fig. 5

Resta da dimostrare che il poligono $A_0, A_1, \ldots,$

$A_{n-1}\,A_0$ è convesso, cosa che omettiamo per brevità.

In questo modo abbiamo rappresentato mediante i numeri complessi il sottogruppo finito del gruppo delle rotazioni con centro in O che avevamo già indicato nel § 21.5. Dalla (24) risulta evidente che, come appunto abbiamo già notato in 21.5, esso è isomorfo con il gruppo $\{ \mathbf{Z}_n , + \}$ (gruppo delle classi di resti modulo n, con l'operazione di addizione).

Facciamo ancora un'osservazione: si ha $(z^k)^n = z^{kn} = (z^n)^k = 1$: cioè la potenza n-sima di ciascuno dei numeri complessi elencati nella (24) è 1. In altre parole:

i numeri $1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}$ *sono radici n-sime dell'unità.*

Questa è una scoperta di notevole interesse; non possiamo però, nei limiti ristretti di questo corso, fermarci per illustrarla come meriterebbe.

Esercizi

1 Calcolare cos 2α, sin 2α; cos 3α, sin 3α (per questi due ultimi calcoli, al fine di ottenere il risultato in modo piú rapido, servirsi della funzione di rotazione).

2 Verificare le seguenti identità:

$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = (\sin\alpha)^2 - (\sin\beta)^2$

$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = (\cos\alpha)^2 - (\sin\beta)^2$

$(\cos\alpha)^4 - (\sin\alpha)^4 = \cos 2\alpha$

$(\cos\alpha)^4 + (\sin\alpha)^4 = 1 - \frac{1}{2}(\sin 2\alpha)^2$

3 Far vedere che conoscendo cos α e sin α è possibile, con sole operazioni razionali, determinare cos $n\alpha$, sin $n\alpha$, con n intero. (Usare la funzione rot; fare il calcolo esplicito per $n = 3, 4, 5$).

4 Far vedere che, conoscendo le funzioni circolari degli angoli di 18°, 30°, 45°, è possibile calcolare cos 3°, sin 3°. (Non si chiede il calcolo esplicito).

5 Dato α, con $0 \leq \alpha \leq \pi$, calcolare $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\sin \frac{\alpha}{2}$.

* **6** Supponendo di conoscere cos 3°, sin 3°, scrivere un'equazione che ha come soluzione sin 1°. (Vedere esercizio 1: si troverà un'equazione di terzo grado, che non sappiamo risolvere; eventualmente se ne potrà cercare una soluzione approssimata . . .).

7 Risolvere le seguenti equazioni in x:

$\cos 2x + \cos x = 0$, $2 \sin (30° + x) - \sqrt{3} \sin x = 1$

$\sin 3x - \sin x \cos 2x = 0$, $\sin 3x + \sin x = 0$

8 Dimostrare l'identità

$$\tan (\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

9 Porre i numeri complessi: $1 + i$, $\sqrt{3} - i$ in forma trigonometrica, rappresentarli nel piano cartesiano e rappresentare il loro prodotto.

10 Verificare l'uguaglianza

$(\cos 60° + i \sin 60°)^6 \ (\cos 150° + i \sin 150°)^3 = i$

* **11** Dimostrare la convessità del poligono $A_0 A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_0$ costruito come è indicato nel punto V di questo §. [Dimostrare che una retta congiungente due punti consecutivi (ad esempio A_0, A_1) lascia tutti gli altri punti da una stessa parte: è importante notare che nessuno dei punti A_2, A_3, . . . , A_{n-1} è interno all'angolo $A_0 \widehat{O} A_1$].

* **12** Dimostrare che 1, $z = \text{rot}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, $z^2, \ldots, z^{n-1}$ sono le *uniche* radici n-sime di 1 nel campo complesso.

Il moto rotatorio uniforme

24.5 I - La funzione di rotazione ha un notevole significato cinematico. Consideriamo, nel nostro solito piano complesso, l'applicazione

$t \longrightarrow \text{rot } t$

periodica di periodo 2π: l'impiego della lettera t è per richiamare il significato di *tempo*. Fissato un valore di t, l'applicazione $z \longrightarrow (\text{rot } t)\, z$ rappresenta una rotazione di tutto il piano; se invece fissiamo un punto $P \leftrightarrow z$ del piano, possiamo considerare le posizioni $P(t) \longrightarrow (\text{rot } t)\, z$ in cui esso

viene a trovarsi al variare di t (cioè al trascorrere del tempo). Notiamo che $P(0) = P$; al variare di t, il punto $P(t)$ percorre ripetutamente un cerchio di centro O (O è l'unico punto che rimane fermo): il periodo 2π ha il significato di *tempo impiegato per fare un giro*. Vediamo ora come viene trasformato il punto $P(t)$ quando t varia da t_0 a $t_0 + \tau$; si ha

$$P(t_0) \leftrightarrow (\mathrm{rot}\, t_0)\, z \quad , \quad P(t_0 + \tau) \leftrightarrow [\mathrm{rot}\,(t_0 + \tau)]\, z$$

Applicando la (18) si ha

$$[\mathrm{rot}\,(t_0 + \tau)]\, z = \mathrm{rot}\,\tau \cdot (\mathrm{rot}\, t_0)\, z \qquad (25)$$

Dunque *la trasformazione che fa passare da* $P(t_0)$ *a* $P(t_0 + \tau)$ *è la rotazione* $\mathrm{rot}\,\tau$, *la medesima che manda* $P(t_1)$ *in* $P(t_1 + \tau)$, *essendo* t_1 *un altro istante qualsiasi*. In altre parole: nel nostro moto, *in intervalli di tempo uguali si compiono rotazioni uguali*. Si può dire allora che il moto rappresentato dalla nostra funzione di rotazione è un *moto rotatorio uniforme*. La relazione (18) è dunque fondamentale per la definizione del moto rotatorio uniforme.

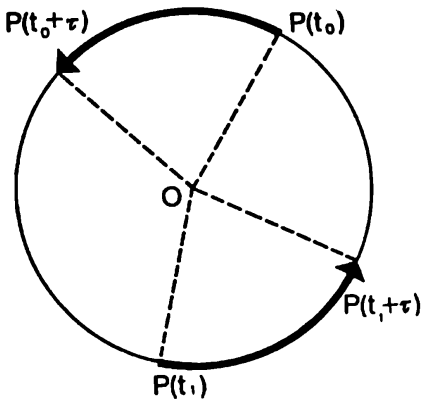


Fig. 6

II - Abbiamo visto che la funzione rot è assegnata una volta che sia fissato il periodo 2π che essa deve avere; perciò le funzioni di rotazione sono tante quanti sono i valori positivi che può assumere π, dunque sono infinite. Nella trattazione del paragrafo precedente noi pensavamo il periodo 2π fissato una volta per tutte e non sentivamo la necessità di indicarlo esplicitamente. Ora però, soprattutto dopo l'interpretazione cinematica che abbiamo dato, avvertiamo la necessità di una notazione piú completa; indichiamo allora con $\mathrm{rot}_{2\pi}$ la funzione di rotazione di periodo 2π, convenendo però di non usare alcun indice per la rotazione di periodo 2π, cioè per la funzione

rot definita a partire dalla misura degli angoli in radianti *.

È spontaneo però chiedersi: come sono legate fra loro le funzioni di rotazione di diverso periodo? Per rispondere dobbiamo rifarci alla misura degli angoli. Indichiamo con α la misura in radianti, con β una misura che assegna valore $\sharp$ all'angolo piatto. Allora si intuisce che il legame deve essere dato dalla relazione lineare

$$\beta = \frac{\sharp}{\pi}\alpha \tag{26}$$

Per la dimostrazione, basta far vedere che, se α è la misura in radianti (cioè verifica l'assioma A10 e attribuisce misura π all'angolo piatto), la misura $\frac{\sharp}{\pi}\alpha$ verifica ancora l'assioma A10 e attribuisce misura $\sharp$ all'angolo piatto (come si vede ponendo $\alpha = \pi$). Ma allora $\frac{\sharp}{\pi}\alpha$ coincide con la β ; infatti l'assioma A10 ci dice che è *unica* la misura degli angoli che assume valore $\sharp$ per l'angolo piatto e che ha tutte le proprietà richieste dall'enunciato. D'altra parte, *i numeri complessi* $\underset{2\sharp}{\mathrm{rot}}\,\beta$ *e* $\mathrm{rot}\,\alpha$ *rappresentano il medesimo punto di* **U** *e perciò coincidono*:

$$\underset{2\sharp}{\mathrm{rot}}\left(\frac{\sharp}{\pi}\alpha\right) = \mathrm{rot}\,\alpha$$

o anche

$$\underset{2\sharp}{\mathrm{rot}}(\beta) = \mathrm{rot}\left(\frac{\pi}{\sharp}\beta\right) \tag{27}$$

* Non possiamo per ora spiegare le ragioni per cui il caso $\sharp = \pi$ merita un trattamento speciale.

Dunque, tutte le funzioni di rotazione si possono esprimere facilmente mediante la funzione rot, che ha periodo 2π. Il numero $\frac{\pi}{\mathfrak{p}}$, uguale alla lunghezza della circonferenza unitaria diviso per il periodo $2\mathfrak{p}$, ha un evidente significato; nei libri di fisica è detto *pulsazione* ed è indicato di solito col simbolo ω. Dunque, la (27) si può anche scrivere

$$\underset{2\mathfrak{p}}{\text{rot}}\,(t) = \text{rot}\,(\omega t) = \cos \omega t + i \sin \omega t \qquad (28)$$

Le funzioni di rotazione sono molto utili per studiare i fenomeni oscillatori; ad esempio, nello studio delle correnti alternate conviene usare le funzioni di rotazione anziché le funzioni a valori reali coseno e seno *.

III - Vediamo ancora una formula interessante. Càpita in molte questioni di dover considerare un'espressione del tipo

$$a \cos t + b \sin t \qquad (29)$$

dove a e b sono costanti reali assegnate, non entrambe nulle. Si tratta di trasformare questa espressione in un'altra, in cui intervenga una sola funzione circolare. Non è difficile raggiungere lo scopo applicando le formule (19), ma si fa ancora piú presto ricorrendo alla funzione rot. Si verifica subito che *la* (29) *è la parte reale della funzione*

* È interessante constatare come sia vantaggioso in questo caso il calcolo con i numeri complessi. Consideriamo ad esempio un circuito caratterizzato da una *resistenza* R e da una *induttanza* L. Se ad esso viene applicata una tensione di tipo sinusoidale di pulsazione ω, passando alle funzioni del tipo k rot (ωt) si trova che *vale una legge formalmente identica alla legge di Ohm in cui però la resistenza è sostituita dall'impedenza espressa dal numero complesso* $R + i\omega L$. (Questa nota, naturalmente, è per chi ha già sentito parlare di queste cose, come studente o come radioamatore: nei libri di elettrotecnica potrà trovare informazioni piú ampie).

$$a \text{ rot } t - ib \text{ rot } t = (a - ib) \text{ rot } t \qquad (30)$$

Mettiamo in forma trigonometrica il numero complesso $a + ib$. Esiste un numero reale α (unico nell'intervallo $]-p, p]$) tale che

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ rot } \alpha$$

Perciò

$$a \text{ rot } t - ib \text{ rot } t = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ rot } (-\alpha) \text{ rot } t =$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2} \text{ rot } (t - \alpha)$$

Ricordiamo ora che la (29) è la parte reale della (30). Perciò

$$a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} \cos (t - \alpha) \qquad (31)$$

Questa è una formula utilissima in un grande numero di casi.

La trigonometria si presta molto ad uno sviluppo lussureggiante di formule e di relazioni. Preferiamo però mettere l'accento sul fatto che le *formule fondamentali sono veramente poche e semplici, specialmente se si fa uso della funzione di rotazione.* In appendice al capitolo riportiamo un formulario breve, ma piú che sufficiente per ogni evenienza.

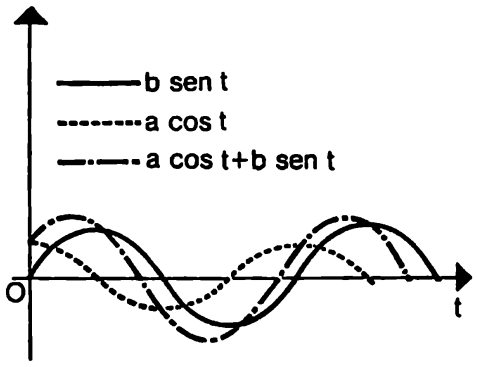


Fig. 7

Vocaboli e simboli

Numero **complesso**: $x + iy$; **parte reale**: x; **parte immaginaria**: y; **unità immaginaria**: i
asse reale: $\mathfrak{X}$; **asse immaginario**: $\mathfrak{Y}$

C: corpo dei numeri complessi
complesso **coniugato** di $z = x + iy$: è il numero complesso $z^* = x - iy$
rotoomotetia
rot: funzione di **rotazione**
$z = |z| \operatorname{rot} \alpha = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$:
$|z| =$ **modulo** di z ; $\alpha =$ **argomento** di z
numero complesso **unitario**: z, con $|z| = 1$
moto rotatorio uniforme; pulsazione ω

Esercizi

* **1** Verificare con cura che se α indica la misura degli angoli in radianti, anche la quantità $\frac{\sphericalangle}{\pi}\alpha$ verifica l'assioma A10 (attribuendo misura $\sphericalangle$ all'angolo piatto).

2 Considerare la funzione $t \longrightarrow \sqrt{3} \cos t + \sin t$; trovare i valori di t per cui si annulla, quelli per cui raggiunge il suo valore massimo. (Quale?).

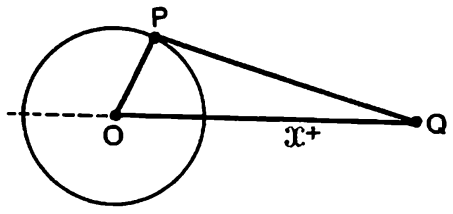
3 Trovare, con l'approssimazione consentita dalle tavole, le soluzioni dell'equazione $9 \cos x + 7 \sin x = 5$.

4 Dimostrare che un'equazione di secondo grado a coefficienti reali con discriminante negativo ha due radici complesse, fra loro coniugate. Esprimerle e rappresentarle geometricamente in questi casi particolari:

$z^2 + z + 1 = 0$, $z^2 - 6z + 13 = 0$, $5z^2 - 2z + 7 = 0$

5 Le relazioni fra le radici di un'equazione di secondo grado valgono anche quando esse sono complesse?

6 Un punto P si muove di moto uniforme con pulsazione ω su un cerchio di raggio r, con centro nell'origine O di un riferimento cartesiano. Determinare la legge di moto di un punto Q che si muove sul semiasse $\mathfrak{X}^+$ conservando una distanza fissa l da P (con $l > r$).
(Il sistema cinematico cosí descritto è il dispositivo *biella-manovella*, che si impiega continuamente nella tecnica).



7 Due punti $P_1(t)$, $P_2(t)$ si muovono di moto rotatorio uniforme con pulsazione ω_1 ed ω_2 rispettivamente, su cerchi con centri in O, origine di un riferimento cartesiano, di raggi R_1 ed R_2 (risp.). Per $t = 0$ essi si trovano entrambi sul semiasse $\mathfrak{X}^+$. Esprimere la distanza $\overline{P_1(t)\ P_2(t)}$ come funzione di t.

* **8** Osservare, nel formulario che conclude il capitolo, le formule riguardanti la funzione rot. Far vedere che tutte le formule scritte nella seconda colonna si possono dedurre da quelle scritte nella prima.

Formule riguardanti le funzioni rot:

$$\operatorname{rot}(-\alpha) = (\operatorname{rot}\alpha)^*$$

$$\operatorname{rot}(\alpha+\beta) = \operatorname{rot}\alpha \cdot \operatorname{rot}\beta$$

$$\operatorname{rot} 0 = 1\ ,\ \operatorname{rot}\frac{\pi}{2} = i$$

$$|\operatorname{rot}\alpha|^2 = \operatorname{rot}\alpha \cdot (\operatorname{rot}\alpha)^* = 1$$

$$\operatorname{rot}(\alpha+\pi) = -\operatorname{rot}\alpha$$

$$\operatorname{rot}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = i\ \operatorname{rot}\alpha$$

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = i\ (\operatorname{rot}\alpha)^*$$

Formule riguardanti le funzioni cos e sin:

$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$$

$$\begin{cases}\cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha\end{cases}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\begin{cases}\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha \\ \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \\ \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha \\ \sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha\end{cases}$$

$$a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} \cos (t - a)$$

dove

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad , \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Formule che legano fra loro la funzione rot e le funzioni cos, sin:

$$\operatorname{rot} \alpha = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{rot} \alpha + \operatorname{rot} (-\alpha)}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{rot} \alpha - \operatorname{rot} (-\alpha)}{2i}$$

25

Alcuni problemi interessanti

Questo capitolo non ci presenta novità in fatto di teoria, ma vuole offrirci occasioni per mettere a frutto nel modo piú vivo possibile quanto abbiamo appreso. Ci porremo alcuni problemi di grande interesse sia in se stessi sia per la carica di idee nuove che contengono.

Problemi di massimo e minimo in geometria

25.1 Nei problemi che ora affrontiamo si prende in esame una famiglia di figure geometriche e ci si propone di trovare quella figura per cui una certa grandezza geometrica (ad es. l'area) assume il valore piú grande possibile.

a) *Fra tutti i triangoli di cui sono assegnate le misure di due lati, trovare quello che ha area maggiore.*

Il problema è cosí semplice che consigliamo il lettore di chiudere il libro e di dare prima la risposta da sé. Comunque, ecco una possibile risposta. Del triangolo ABC siano assegnati $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$; il triangolo dunque non è determinato (neppure a meno di isometrie!). Se pensiamo di fissare i vertici B e C, e il semipiano in cui deve trovarsi il nostro triangolo, è evidente che il vertice A deve stare su un semicerchio con centro in C e raggio b.

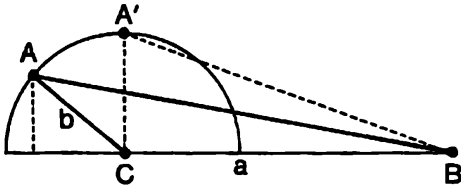


Fig. 1

Cosí risulta descritta la famiglia dei triangoli fra cui dobbiamo scegliere quello di massima area. Ricordiamo che l'area è data dalla formula $s = \frac{1}{2}\, ah$, dove h è l'altezza mandata dal

vertice A. Si tratta allora di fare in modo che l'altezza sia la piú grande possibile. È evidente che questo accade quando l'angolo $\widehat{ACB}$ è retto, ed è $h = b$; il valore massimo che l'area assume è $\frac{1}{2}\,ab$.

b) *Fra tutti i rettangoli di perimetro $2p$ assegnato trovare quello di area massima.*

Anche in questo caso la condizione posta individua una famiglia di figure; possiamo rappresentare i nostri rettangoli in modo che essi abbiano un vertice coincidente con l'origine O di un riferimento cartesiano, e i due vertici A, B adiacenti ad esso, rispettivamente, sui semiassi $\mathfrak{x}^+$ ed $\mathfrak{y}^+$. Indichiamo con P il vertice opposto di O; allora, posto $\overline{OA} = x$, $\overline{OB} = y$, si ha $P \leftrightarrow (x, y)$. Il testo del problema prescrive che sia $2x + 2y = 2p$, cioè

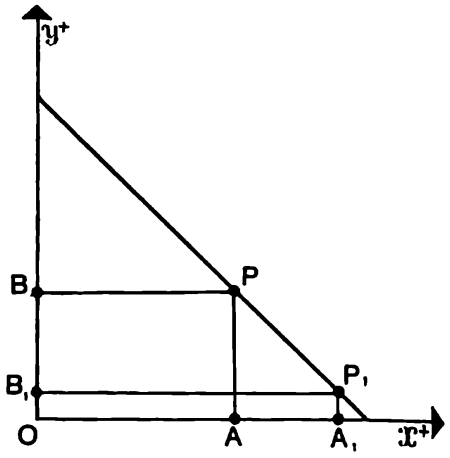


Fig. 2

$$x + y = p \qquad (1)$$

Questa è l'equazione di una retta; il vertice P sta sul segmento di questa retta che è contenuto nel primo quadrante. Osservando che i rettangoli per cui P è vicino ad un asse cartesiano hanno area piccola (vd. la figura 2), siamo portati a congetturare che il rettangolo di maggiore area sia il quadrato di lati $x = y = \frac{p}{2}$. Vediamo una dimostrazione geometrica di questa congettura. Sia $OA'P'B'$ il quadrato e sia $OAPB$ un rettangolo qualsiasi. Supponiamo, ad esempio, che sia

$$\overline{OA} < \overline{OA'} \quad , \quad \overline{OB} > \overline{OB'}$$

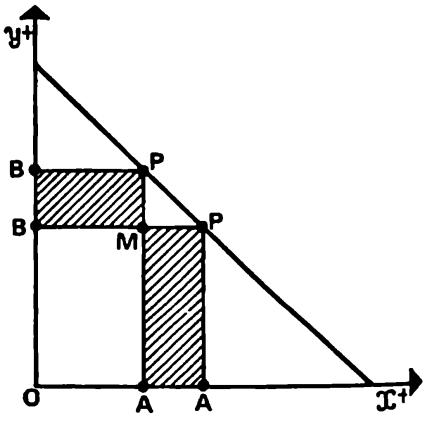


Fig. 3

È evidente che il rettangolo $OAPB$ può essere ottenuto dal quadrato $OA'P'B'$ togliendo il rettan-

golo $AA'P'M$ (vedere la figura 3) e aggiungendo il rettangolo $B'MPB$. Si tratta di confrontare le aree di questi rettangoli. Si ha $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ (perché?); d'altra parte è $\overline{B'M} = \overline{OA} < \overline{OA'} = \overline{A'P'}$. Dunque l'area del rettangolo $AA'P'M$ è maggiore dell'area del rettangolo $B'MPB$. Poiché nel passare dal quadrato $OA'P'B'$ al rettangolo $OAPB$ è piú l'area che togliamo di quella che aggiungiamo, possiamo concludere che il quadrato ha area maggiore.

Analogo discorso si può fare se si ha

$$\overline{OA} > \overline{OA'} \quad , \quad \overline{OB} < \overline{OB'}$$

Dunque risulta dimostrato che il quadrato $OA'P'B'$ è il rettangolo di area massima ■

Vogliamo ritrovare questo risultato con una seconda dimostrazione, di tipo analitico. Osserviamo che il nostro rettangolo è determinato una volta che sia assegnato $x = \overline{OA}$ (con $0 < x < p$); infatti la misura dell'altro lato $y = \overline{OB}$ è determinata, essendo, per la (1), $y = p - x$. L'area è allora espressa, a partire da x, per mezzo della seguente funzione:

$$f\colon x \longrightarrow x(p - x) = xp - x^2$$

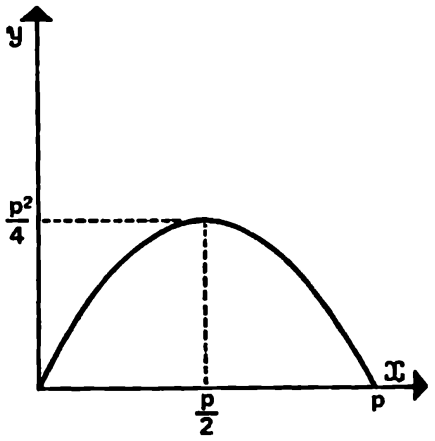


Fig. 4

Abbiamo già posto tante volte un polinomio di secondo grado in forma espressiva mediante il «completamento del quadrato». (Chi non lo ricordasse riveda la conclusione del paragrafo 18.1).

Si ha

$$xp - x^2 = -\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{4}$$

Poiché il termine $-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2$ è ≤ 0, è evidente che la funzione f assume il suo valore massimo per $x=\frac{p}{2}$. Il valore massimo che essa assume è $\frac{p^2}{4}$: esattamente come avevamo già trovato ■

c) *Fra tutti i triangoli di cui sono assegnati la misura b di un lato e l'area s, trovare quello di perimetro minimo.*

Sia ABC un triangolo tale che $\overline{AC}=b$, e sia h l'altezza mandata dal vertice B; essendo assegnata l'area $s=\frac{1}{2}hb$, risulta assegnata $h=\frac{2s}{b}$.

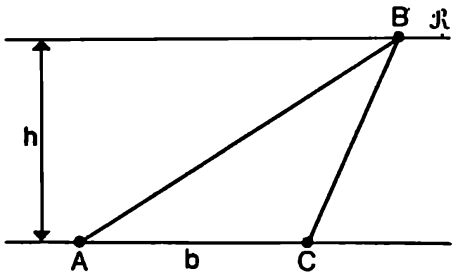


Fig. 5

Possiamo ritenere fissati i vertici A, C ed un semipiano generato dalla retta AC in cui il nostro triangolo deve trovarsi. Allora la famiglia dei triangoli definita dal nostro problema è costituita dai triangoli che hanno i vertici A e C fissati, e il terzo vertice B su una retta $\mathcal{R}$ parallela ad AC, a distanza h da AC.

Fra questi triangoli occorre trovare quello per cui il perimetro $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$ è minimo; poiché $\overline{CA}=b$ è fissato, si può riformulare il problema chiedendo semplicemente che la somma

$$\overline{AB}+\overline{BC}$$

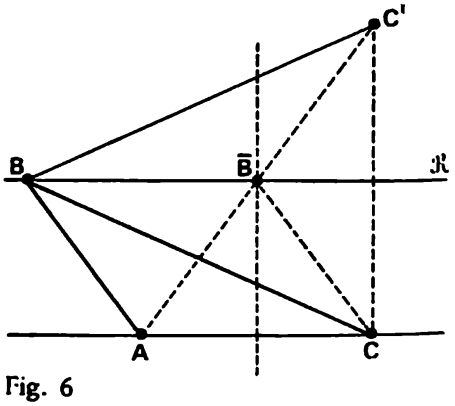


Fig. 6

sia minima. Ma questo è un caso particolare del problema di Erone, che abbiamo già studiato nel paragrafo 14.2.

Rivediamone la soluzione: preso il punto C', simmetrico di C rispetto alla retta $\mathcal{R}$, congiungiamo A con C'; il segmento $[A, C']$ taglia la retta $\mathcal{R}$

in un punto $\overline{B}$ che è il punto cercato. Infatti, per un altro punto qualsiasi B di $\mathcal{R}$ si avrebbe $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{BC'} > \overline{AC'} = \overline{A\overline{B}} + \overline{\overline{B}C}$.

Abbiamo già osservato, commentando la soluzione del problema di Erone (vd. la conclusione del paragrafo 14.4) che la simmetria avente come asse la perpendicolare ad $\mathcal{R}$ per $\overline{B}$ scambia fra loro i raggi $\overline{BA}$ e $\overline{BC}$; poiché essa trasforma in sé la retta AC, che è parallela ad $\mathcal{R}$, essa scambia fra loro i punti A e C. Dunque il triangolo ABC è *isoscele* ■

La risposta al problema originario c) si può dunque formulare in questi termini:

Fra tutti i triangoli per cui sono assegnati un lato e l'area, quello di perimetro minimo è il triangolo isoscele.

Dopo questo problema viene spontaneo di formulare quest'altro, in cui il ruolo del perimetro e dell'area si scambiano.

d) *Fra tutti i triangoli di cui è assegnato un lato b e il perimetro $2p$, trovare quello di area massima.*

L'intuizione ci dice che *il triangolo cercato sarà anche in questo caso quello isoscele.*

Sia infatti ABC un triangolo isoscele con vertice in B, tale che $\overline{AC} = b$ e il perimetro sia $2p$, cioè tale che sia $\overline{AB} = \overline{BC} = p - \frac{1}{2}b$; prendiamo un altro qualsiasi triangolo $AB'C$, con gli stessi vertici A e C e con lo stesso perimetro $2p$ del precedente. Naturalmente, abbiamo diritto di esigere che B' si trovi nello stesso semipiano in cui si trova B, rispetto alla retta AC; in base a quanto abbiamo visto a proposito del problema prece-

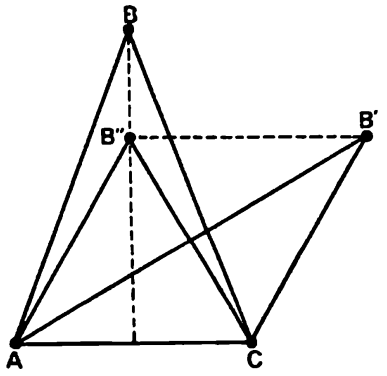


Fig. 7

dente, possiamo costruire un ulteriore triangolo $AB''C$, isoscele, con vertice B'', che ha la stessa area, e quindi la stessa altezza, del triangolo precedente, e che ha perimetro *minore*. Confrontiamo ora i triangoli ABC, $AB''C$: essi sono isosceli, con la stessa base $[A, C]$; il primo ha perimetro maggiore del secondo, e pertanto ha altezza maggiore del secondo. Dunque il primo ha area maggiore del secondo; poiché i triangoli $AB''C$ ed $AB'C$ hanno la stessa area, si conclude che il triangolo ABC ha area maggiore del triangolo $AB'C$■

I risultati scoperti ci permettono di risolvere con straordinaria facilità tanti problemi piú complessi. Ecco un esempio, fra i tanti.

e) *Fra tutti i quadrilateri di perimetro assegnato il quadrato è quello di area massima.*

Consideriamo un quadrilatero $ABCD$ qualsiasi; lo trasformeremo in un quadrato, attraverso procedimenti successivi che fanno crescere la sua area lasciandone immutato il perimetro. Notiamo che questi procedimenti accrescono man mano la simmetria della figura.

1ª fase. Presa una qualsiasi delle diagonali (ad es. $[A, C]$); trasformiamo ciascuno dei due triangoli ABC, ADC, in un triangolo isoscele di base $[AC]$, di uguale perimetro, che rimanga nello stesso semipiano rispetto alla retta AC.

2ª fase. Prendiamo ora come base la diagonale $[B'D']$ e rifacciamo la stessa operazione di prima per i due triangoli $D'AB'$, $D'CB'$. Il quadrilatero che otteniamo, che ha area maggiore del precedente, *ha due assi di simmetria passanti per i vertici: è un rombo.*

3ª fase. Trasformiamo il rombo $A'B'C'D'$ in un quadrato di uguale lato, che ha area maggiore (c'è bisogno di dire perché?).

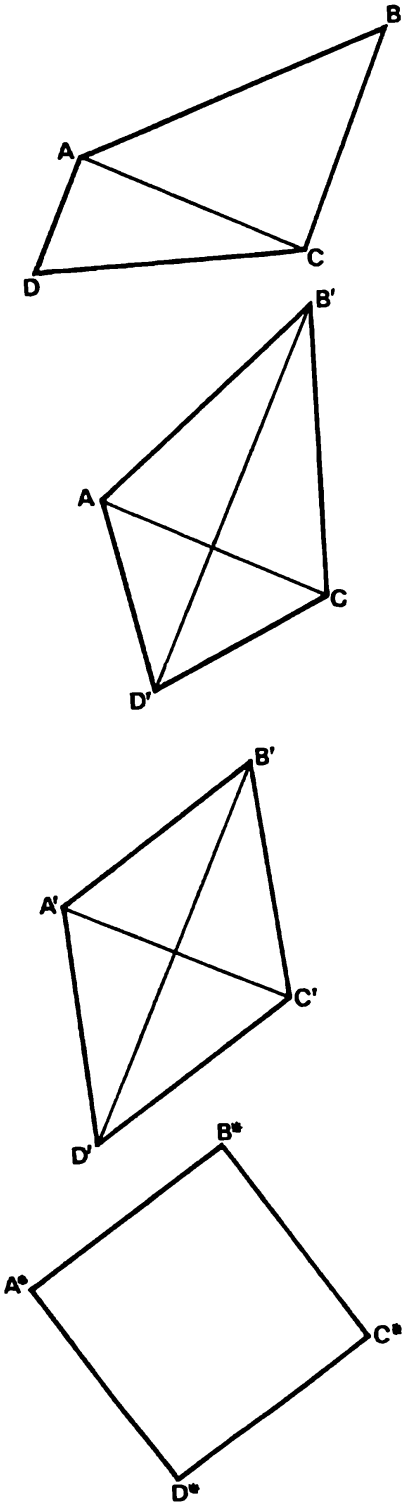


Fig. 8

Così abbiamo finito. Osserviamo che non importa che il quadrilatero $ABCD$ sia convesso: la dimostrazione funziona sempre. Naturalmente una o due fasi possono essere superflue, se la figura ha già la simmetria voluta: ma se il quadrilatero considerato non è un quadrato, una almeno di queste fasi si deve applicare, e l'area si accresce nel passare al quadrato di uguale perimetro■

Un lettore attento potrà essersi meravigliato del fatto che siamo passati di colpo ai quadrilateri senza completare il discorso riguardo ai triangoli, cioè senza rispondere a questa domanda:

f) *Fra tutti i triangoli di assegnato perimetro quale ha area massima?*

La nostra intuizione ci dice subito che un tale triangolo c'è ed è il triangolo equilatero. Se diamo per scontato che un triangolo di area massima esista allora è chiaro che esso deve essere un triangolo equilatero; infatti, se avesse due lati fra loro disuguali lo si potrebbe trasformare con il procedimento del punto d) in un triangolo isoscele di uguale perimetro e di area maggiore: perciò non sarebbe un triangolo di area massima. Dunque, se ammettiamo che un triangolo di area massima esista, la risposta diventa facile.

Osserviamo però, di sfuggita, che questo problema di esistenza non è poi tanto banale: ad esempio, chiediamoci: fra i numeri razionali minori di 1 ne esiste uno massimo? Evidentemente no, perché per ogni numero razionale x minore di 1 se ne può trovare un altro, anch'esso minore di 1, che lo supera [ad esempio: $\frac{1}{2}(1+x)$: verificarlo!].

Si potrebbe chiedere: perché non applicare ai triangoli lo stesso procedimento che abbiamo applicato nel caso dei quadrilateri? Proviamoci! Partiamo dunque da un triangolo qualunque ABC

e cerchiamo di ricavarne un triangolo equilatero conservando il perimetro e accrescendone l'area, attraverso successive simmetrizzazioni. Cominciamo con l'asse del segmento $[B, C]$. Otteniamo un triangolo

$A'BC$

isoscele, con vertice in A'. In generale sarà $\overline{A'B} \neq \overline{BC}$; allora simmetrizziamo prendendo come asse l'asse del segmento $[A', C]$; otterremo un triangolo

$A'B'C$

isoscele con vertice B'. Tuttavia, nel fare quest'ultimo passo, abbiamo guastato qualcosa del lavoro precedente, perché non è detto ora che sia $\overline{A'C} = \overline{A'B'}$. Se proseguiamo simmetrizzando il nostro triangolo rispetto all'asse del segmento $[A', B']$, otteniamo un nuovo triangolo

$A'B'C'$

isoscele (con vertice C'), ma non necessariamente equilatero. Stiamo facendo il lavoro di Sisifo? * Se proseguiamo nel nostro lavoro (cioè simmetrizziamo successivamente rispetto agli assi dei lati, procedendo in ordine circolare) ci accorgiamo che il nostro triangolo si avvicina sempre di piú ad un triangolo equilatero. Ed è questo triangolo equilatero che ha lo stesso perimetro ed area maggiore del triangolo da cui siamo partiti.

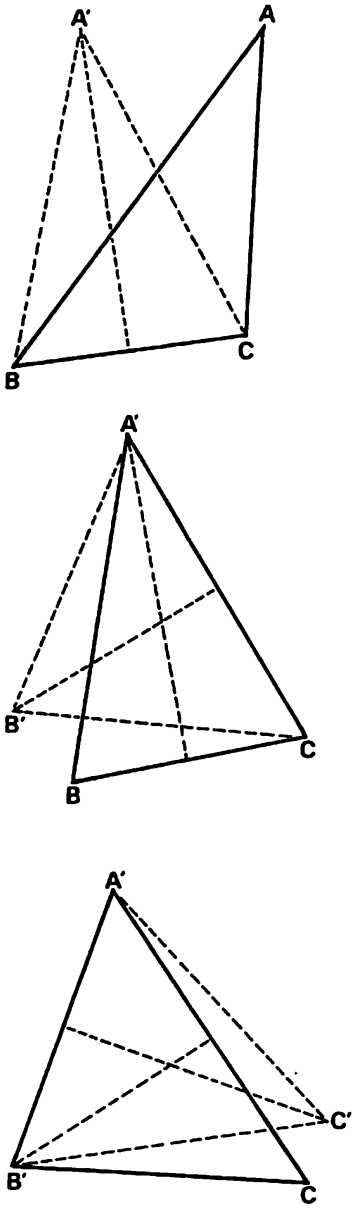


Fig. 9

Questa non è una dimostrazione rigorosa, ma è uno spunto interessante verso tecniche che non conosciamo e che tirano in ballo, in un certo modo, una catena di infinite operazioni.

In generale, si può dimostrare che *ra i poligoni di n lati di assegnato perimetro il poligono di massima area è il poligono regolare.*

* Personaggio mitologico condannato in eterno a spingere sulla cima di un monte un masso che subito ricadeva.

Questi problemi, in cui si tratta di rendere massima l'area sotto la condizione che il perimetro rimanga costante, vengono detti **problemi isoperimetrici**. Il loro studio è stato coltivato fin dall'antichità e ha dato luogo ad una grande quantità di scoperte interessanti e di procedimenti veramente belli.

Esercizi

1 Riprendere il problema a); esprimere l'area del triangolo mediante a, b e l'ampiezza dell'angolo γ. Ritrovare cosí il risultato per via trigonometrica.

2 Dare una nuova soluzione del problema d) applicando la formula di Erone.

3 Dimostrare che fra tutti i rettangoli inscritti in un cerchio il quadrato è quello di area massima. (Si può procedere per via puramente geometrica oppure per via trigonometrica).

4 Fra tutti i quadrati inscritti in un quadrato assegnato, trovare quello di area minima.

5 Dimostrare che fra tutti i rettangoli di area assegnata il quadrato è quello di perimetro minimo.

* **6** Dimostrare che, assegnato un quadrilatero non convesso, ne esiste uno convesso di uguale perimetro e di area maggiore.

* **7** Si dice *costante isoperimetrica* di un poligono il rapporto fra la sua area ed il quadrato del suo perimetro. Dimostrare che due poligoni fra loro simili hanno la stessa costante isoperimetrica.
Esprimere la costante isoperimetrica di un poligono regolare di n lati e calcolarne, mediante le tavole trigonometriche, i valori approssimati per $n = 3, 4, 5, \ldots, 12$ e per $n = 120$.

** **8** Due navi si muovono con direzioni fisse e velocità costanti; calcolare l'istante e la posizione in cui si trovano a distanza minima. (Questo problema è già stato considerato nel paragrafo 16, e ne è stata proposta una soluzione geometrica; qui proponiamo una soluzione analitica. È conveniente, come si è già visto in tanti altri casi, considerare il quadrato della distanza, anziché la distanza).

* **9** Dati tre numeri positivi che hanno una somma assegnata, dimostrare che il loro prodotto è massimo quando essi sono uguali. (Procedere cosí: detta $3a$ la loro somma, se non sono tutti uguali ve ne sarà uno piú piccolo di a, che potrà essere scritto $a - h$, con $h > 0$, ed uno piú grande di a, che potrà essere scritto

$b+K$, con $K > 0$. Se il primo viene trasformato in a, riducendo conveniente-mente il secondo e lasciando immutato il terzo, il prodotto aumenta . . . ; prose-guire così . . .).
Riconoscere che il risultato vale per il prodotto di n numeri, con n intero positivo qualunque.

10 Utilizzando il risultato dell'esercizio precedente, risolvere il problema *f*).

Si comincia col costruire una scuola

25.2 a) Un comune vuole costruire una scuola che deve servire quattro frazioni: A, B, C, D, disposte lungo una strada rettilinea. Il numero dei ragazzi delle singole frazioni è, ordinatamente:

120 , 150 , 100 , 200

In quale frazione si deve collocare la scuola se si vuole che risulti minima la somma delle distanze che i ragazzi devono percorrere per recarvisi?

Anche per questo problema è consigliabile chiudere il libro e cercare di risolverlo da sé, procedendo dapprima per tentativi e poi cercando di dare una risposta generale.

Ed ecco un possibile approccio: passiamo in rassegna i punti A, B, C, D, domandiamoci che cosa succede quando spostiamo la sede della scuola da una frazione alla successiva.

Spostando la sede da A a B vi sono 120 ragazzi (quelli di A), che allungano il percorso del tratto $\overline{AB}$ e 350 ragazzi (tutti gli altri) che lo accorciano di uguale tratto. Quindi *lo spostamento è conveniente.*

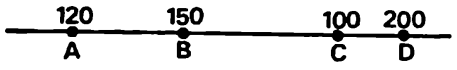


Fig. 10

Spostando la sede da B a C vi sono 270 ragazzi (quelli di A e di B), che allungano il percorso del tratto $\overline{BC}$ e 300 ragazzi (quelli di C e D) che accorciano il percorso di un uguale tratto. Quindi *lo spostamento è conveniente.*

Spostando la sede da C a D vi sono 370 ragazzi

(quelli di A, B, C) che allungano il percorso del tratto $\overline{CD}$, mentre soltanto i 200 ragazzi di D lo accorciano di un uguale tratto; dunque *questo spostamento non è conveniente.*

Possiamo anche servirci del seguente grafo, in cui le frecce indicano gli spostamenti convenienti. Non c'è nessun dubbio che il punto C è il piú conveniente: spostandosi da C sia verso destra che verso sinistra aumenta il percorso complessivo.

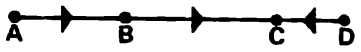


Fig. 11

Può accadere (ma non nel caso concreto considerato) che vi siano due frazioni consecutive per cui il percorso complessivo risulta uguale: in questo caso vi è una indifferenza fra le due scelte.

Notiamo che *per trovare la soluzione non interessa conoscere le distanze fra le località, ma solo l'ordine con cui esse si seguono lungo la strada* (e, naturalmente, il numero dei ragazzi che vi abitano).

Un altro metodo per risolvere il nostro problema consiste nello studio della funzione che rappresenta il percorso complessivo. Rappresentiamo le località su una retta in cui abbiamo introdotto un sistema di coordinate. Indichiamo con a, b, c, d le coordinate dei punti A, B, C, D, rispettivamente. Il percorso complessivo che si deve fare per raggiungere un punto $P \leftrightarrow x$ (qualsiasi, cioè non necessariamente coincidente con uno dei punti A, B, C, D) è dato dalla funzione di x:

$$f(x) = 120\,|\,x - a\,| + 150\,|\,x - b\,| +$$
$$+ 100\,|\,x - c\,| + 200\,|\,x - d\,|$$

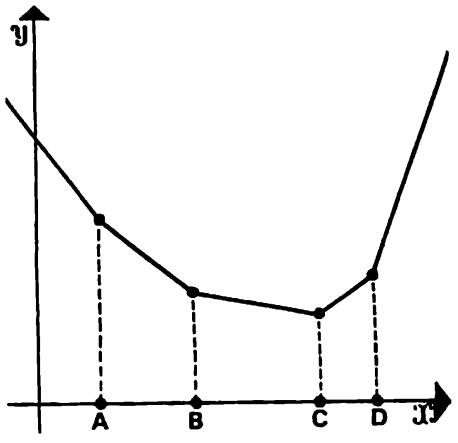


Fig. 12

Questa funzione è un po' complicata, e occorre studiarla separatamente negli insiemi:

$$x \leq a,\ a \leq x \leq b,\ b \leq x \leq c,\ c \leq x \leq d,\ d \leq x$$

Ad esempio, nell'intervallo $b \leq x \leq c$ la funzione si può scrivere:

$$f(x) = 120(x - a) + 150(x - b) -$$
$$- 100(x - c) - 200(x - d) =$$
$$= (270 - 300)\, x - 120\, a - 150\, b + 100\, c + 200\, d$$

Si scopre allora che in questo intervallo (cosí come negli altri) la funzione non è altro che un polinomio di primo grado in x, ed è perciò rappresentata da un tratto rettilineo. Si dice che è una funzione « lineare a tratti » (abbiamo già trovato funzioni di questo tipo nel paragrafo 17.6).

Lasciamo al lettore il compito di rifare per conto suo un grafico accurato della funzione, dando valori numerici ad a, b, c, d. (Domanda: quale significato ha la *pendenza* dei tratti rettilinei che compongono il grafico?).

b) Riprendiamo il nostro problema, dandogli una formulazione diversa; in sostanza, noi cerchiamo l'ubicazione della scuola che renda minimo il disagio complessivo per coloro che devono frequentarla. Nel punto a) abbiamo preso come misura del disagio la distanza da percorrere; tuttavia questa non è l'unica stima quantitativa possibile del disagio. Possiamo, ad esempio, assumere che esso sia proporzionale al *quadrato* della distanza da percorrere. Questa valutazione è accettabile se si pensa che le distanze rilevanti comportano l'impiego di un mezzo di trasporto, con ulteriore spesa, perdita di tempo, ecc.

Nel formulare il nostro problema, supporremo per semplicità che vi siano soltanto tre località A, B, C contrassegnate sulla retta da tre coordinate x_1, x_2, x_3; indicheremo con n_1, n_2, n_3, i numeri rispettivi dei ragazzi che vi abitano. Supporremo che la scuola possa essere costruita in un punto qualunque $P \leftrightarrow x$ della retta. La « *funzione di disagio* », cioè la funzione che esprime il disagio complessivo da affrontare per raggiungere il punto $P \leftrightarrow x$, è ora la seguente:

$$g(x) = n_1 (x - x_1)^2 + n_2 (x - x_2)^2 + n_3 (x - x_3)^2 =$$
$$= (n_1 + n_2 + n_3) x^2 - 2 (n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3) x +$$
$$+ (n_1 x^2_1 + n_2 x^2_2 + n_3 x^2_3).$$

Si tratta di un polinomio di secondo grado in x (le altre lettere non ci interessano perché rappresentano quantità fisse); questo polinomio ha come grafico una parabola che rivolge la concavità verso l'alto; sappiamo (dalle solite considerazioni dei paragrafi 18.1, 18.2) che esso raggiunge il suo valore minimo per

$$x = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3}{n_1 + n_2 + n_3} \qquad (2)$$

Questa formula diventa particolarmente semplice se si ha $n_1 = n_2 = n_3$; infatti in questo caso si ha

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \qquad (3)$$

Il problema che abbiamo trattato può sembrare artificioso. Comunque, in realtà, ci sono tante questioni scientifiche e tecniche che portano a considerare il minimo di una funzione come quella che abbiamo considerato ora; il procedimento che abbiamo seguito è, anzi, noto col nome di « metodo dei minimi quadrati ».

c) È ancora piú interessante la seguente variante del nostro problema. Supponiamo che le tre frazioni del nostro comune: A , B , C non siano disposte su una stessa retta, anzi supponiamo che non vi sia nemmeno la strada e che si voglia costruire la scuola (e la strada) in modo che il disagio per recarsi a scuola sia il minimo possibile (assumendolo ancora proporzionale al quadrato della distanza). Per semplicità supporremo che vi sia lo

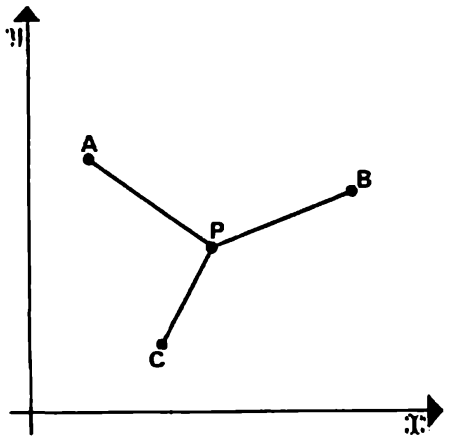


Fig. 13

stesso numero n di ragazzi in ogni frazione. Utilizzeremo il riferimento cartesiano, ponendo

$$A \leftrightarrow (x_1 , y_1) \quad , \quad B \leftrightarrow (x_2 , y_2) \quad , \quad C \leftrightarrow (x_3 , y_3)$$

Indichiamo con $P \leftrightarrow (x , y)$ il punto variabile, si ha la seguente funzione:

$$\begin{aligned} & n\,[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2] + \\ & + n\,[(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2] + \\ & + n\,[(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2] \end{aligned} \tag{4}$$

che si può scrivere

$$\begin{aligned} & n\,[3x^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3)\,x + (x^2{}_1 + x^2{}_2 + x^2{}_3) + \\ & + 3y^2 - 2\,(y_1 + y_2 + y_3)\,y + (y^2{}_1 + y^2{}_2 + y^2{}_3)] \end{aligned}$$

Conviene porre

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \, , \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \tag{5}$$

e raccogliere il fattore 3. Cosí la (4) prende la forma

$$3n \left[x^2 - 2\bar{x}x + \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3} + \right.$$
$$\left. + y^2 - 2\bar{y}y + \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{3} \right]$$

Questa espressione può sembrare complicata, ma diventa semplice se si pensa che le variabili del nostro problema sono solo la x e la y. È evidente allora che essa può essere trattata con il consueto

metodo del « completamento del quadrato » (già applicato tante volte!), ricavando

$$3n\left[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}-\right.$$

$$\left.-\bar{x}^2+\frac{y_1^2+y_2^2+y_3^2}{3}-\bar{y}^2\right]$$

La lettera x compare solo nel termine $(x-\bar{x})^2$, che è ≥ 0 e si annulla solo per $x=\bar{x}$; similmente, la lettera y compare solo nel termine $(y-\bar{y})^2$, che è ≥ 0 e si annulla solo per $y=\bar{y}$.

Dunque è chiaro che *il minimo è raggiunto nel punto* $\bar{P}\leftrightarrow(\bar{x},\bar{y})$; le formule (5), analoghe alla (3), trovata nel corso del problema con punti allineati, hanno un aspetto molto interessante: ricordano le formule introdotte nel paragrafo 16.1 per rappresentare il punto medio di un segmento. Nel caso delle (5) interviene la media aritmetica delle coordinate di tre punti anziché due. Per studiare le proprietà del punto $\bar{P}$, congiungiamo i vertici del triangolo ABC con i punti di mezzo dei lati opposti; in altre parole, costruiamo le **mediane** del triangolo ABC. Sia A' il punto di mezzo del lato $[B,C]$, sia B' il punto di mezzo del lato $[A,C]$ e sia C' il punto di mezzo del lato $[A,B]$. Sarà:

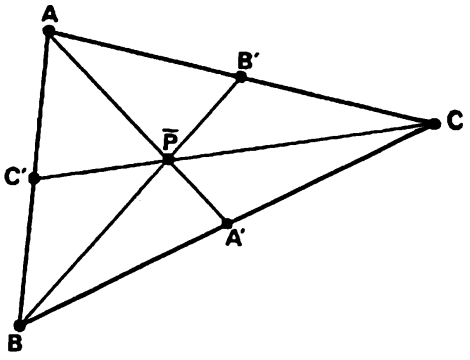


Fig. 14

$$A'\leftrightarrow\left(\frac{x_2+x_3}{2}\ ,\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

$$B'\leftrightarrow\left(\frac{x_1+x_3}{2}\ ,\ \frac{y_1+y_3}{2}\right)$$

$$C'\leftrightarrow\left(\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Applichiamo ora la rappresentazione parametrica del segmento che abbiamo trovato nel paragrafo 22.3. Il segmento $[A, A']$ si rappresenta così:

$$x = x_1 (1 - t) + \frac{x_2 + x_3}{2} t$$

$$y = y_1 (1 - t) + \frac{y_2 + y_3}{2} t$$

dove t varia nell'intervallo $[0, 1]$. Si verifica immediatamente che per $t = 0$ si ottiene il punto $A \leftrightarrow (x_1, y_1)$, per $t = 1$ si ottiene il punto

$$A' \leftrightarrow \left(\frac{x_2 + x_3}{2} , \frac{y_2 + y_3}{2} \right)$$

Facendo $t = \frac{2}{3}$ si ottiene il punto $\overline{P} \leftrightarrow (\overline{x}, \overline{y})$; dunque la mediana passa per il punto $\overline{P}$. Questo discorso si può ripetere per le altre due mediane. Possiamo concludere che le tre mediane si incontrano nel punto $\overline{P}$. Il punto $\overline{P}$ è detto **baricentro** del triangolo ABC.

Esercizi

* **1** Far vedere che il problema a) si può risolvere graficamente in questo modo: tracciare quattro segmenti consecutivi di lunghezza proporzionale, ordinatamente, al numero dei ragazzi di A, B, C, D; prendere il punto di mezzo del segmento così ottenuto... (Completare il discorso e dare le giustificazioni).

* **2** Nel problema c), riconoscere che il baricentro divide ciascuna mediana in due segmenti di cui uno (quello che va dal vertice al baricentro) è doppio dell'altro.
(Converrà riguardare il paragrafo 22.3 per riesaminare le relazioni che sussistono fra il parametro t e la coordinata s sulla retta).

* **3** Sempre riguardo alla conclusione di c): qual è il baricentro del triangolo $A'B'C'$? Che cosa si può dire della misura dei suoi lati? Che cosa succede se si

prendono i punti di mezzo dei lati del triangolo $A'B'C'$, e se si prosegue così indefinitamente?

** **4** In un'officina vi sono cinque macchine, che producono pezzi di uguale tipo. Esse sono in grado di produrne 30, 42, 73, 80, 100 all'ora. Ciascuna macchina viene affidata ad un operaio. I cinque operai disponibili: A, B, C, D, E sono in grado di lavorare 36 ore, 40 ore, 15 ore, 30 ore, 38 ore, rispettivamente, alla settimana. Come conviene distribuire le macchine per ottenere che la produzione sia massima?
Trovata la soluzione di questo problema, formularlo e risolverlo in termini generali usando lettere.

Per concludere: ancora un tuffo nella probabilità

25.3 Al punto di concludere il nostro itinerario, vogliamo occuparci ancora di problemi di probabilità, giovandoci della maggiore capacità di ragionamento e di calcolo che abbiamo acquisito.

a) In un sacchetto c'è una pallina nera; ne posso aggiungere tante bianche quante voglio, pagando però un prezzo x per ciascuna. Faccio quindi una estrazione a sorte: se esce una pallina bianca vinco 1000 lire, se esce una pallina nera, nulla.
Quante palline bianche mi conviene aggiungere perché il guadagno medio sia il maggiore possibile?

Questo problema può sembrare artificioso, ma non è più tale se lo si considera un modello semplificato (una « simulazione », come si usa dire) di certi problemi economici. Ad esempio, in molti casi concreti la probabilità di raggiungere un certo obiettivo economico non è un dato fisso, ma dipende dall'ampiezza dei mezzi che vengono impiegati. Così, la probabilità di trovare il petrolio in una certa zona cresce col crescere del numero delle trivellazioni che si compiono, e occorre tener conto del costo di ciascuna trivellazione.

Veniamo dunque alla soluzione del problema. Se n sono le palline bianche acquistate, il guadagno medio y è espresso, in K£, dalla formula

$$y = \frac{n}{n+1} - nx \qquad (6)$$

dove, evidentemente, il primo termine rappresenta la vincita media, il secondo termine la somma spesa. Dunque, assegnato x, dobbiamo determinare il valore n che è piú opportuno. È molto vantaggiosa la rappresentazione grafica: per ogni n fissato la (6) rappresenta una retta in forma normale. (Naturalmente, per fare il disegno conviene scegliere opportunamente le unità di misura per le ascisse e per le ordinate). Facendo $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ si hanno le rette:

$$\mathcal{R}_1 : y = \frac{1}{2} - x$$

$$\mathcal{R}_2 : y = \frac{2}{3} - 2x$$

$$\mathcal{R}_3 : y = \frac{3}{4} - 3x$$

$$\mathcal{R}_4 : y = \frac{4}{5} - 4x \quad \text{ecc.}$$

Per ogni x fissato occorre prendere l'intero positivo n tale che l'ordinata della relativa retta sia la piú grande possibile: la rappresentazione grafica ci fornisce il procedimento per la determinazione di n. Anzitutto, osserviamo che per $x \geq \frac{1}{2}$

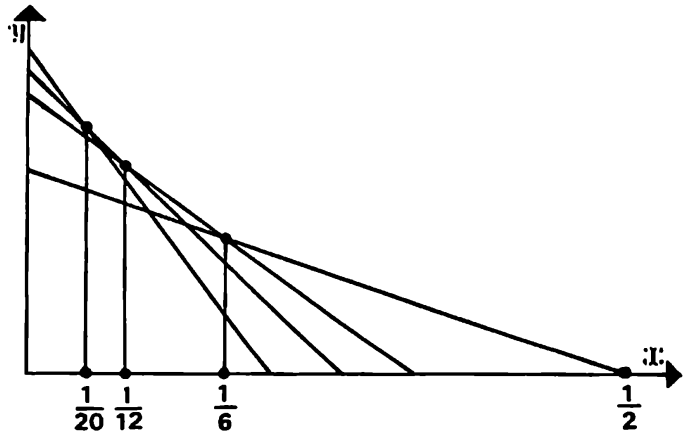


Fig. 15

il gioco non è in nessun caso conveniente. La nostra rappresentazione grafica ci suggerisce poi di intersecare $\mathcal{R}_1$ con $\mathcal{R}_2$; prendendo la differenza membro a membro delle rispettive equazioni si ha

$$x = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad \left(\text{a cui corrisponde } y = \frac{1}{3}\right)$$

Intersechiamo $\mathcal{R}_2$ con $\mathcal{R}_3$; sempre facendo la differenza membro a membro otteniamo

$$x = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12} \quad \left(\text{a cui corrisponde } y = \frac{1}{2}\right)$$

Intersechiamo $\mathcal{R}_3$ con $\mathcal{R}_4$:

$$x = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{20} \quad \left(\text{a cui corrisponde } y = \frac{3}{4}\right)$$

Al crescere di n la pendenza delle rette decresce (cresce però il suo valore assoluto); perciò:

L'insieme degli x per cui la retta $\mathcal{R}_1$ sovrasta la retta $\mathcal{R}_2$ è $\left\{x : x > \frac{1}{6}\right\}$.

L'insieme degli x per cui la retta $\mathcal{R}_2$ sovrasta la retta $\mathcal{R}_3$ è $\left\{x : x > \frac{1}{12}\right\}$.

L'insieme degli x per cui la retta $\mathcal{R}_3$ sovrasta la retta $\mathcal{R}_4$ è $\left\{x : x > \frac{1}{20}\right\}$, ecc.

Dunque:

nell'intervallo $\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{1}{2}$ la retta $\mathcal{R}_1$ sovrasta ogni altra;

nell'intervallo $\frac{1}{12} \leq x \leq \frac{1}{6}$ la retta $\mathcal{R}_2$ sovrasta ogni altra;

nell'intervallo $\frac{1}{20} \leq x \leq \frac{1}{12}$ la retta $\mathcal{R}_3$ sovrasta ogni altra.

Siamo cosí in grado di trovare, per ogni x positivo, il valore ottimale di n: per $\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{1}{2}$, $n = 1$; per $\frac{1}{12} \leq x \leq \frac{1}{6}$, $n = 2$; per $\frac{1}{20} \leq x \leq \frac{1}{12}$, $n = 3$, ... Per i valori di x: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$, ... vi è indifferenza fra due valori consecutivi di n.

L'esercizio che segue è un computo di probabilità un po' piú complesso di quelli svolti precedentemente.

b) Nico vuole prendere parte ad una gita per cui gli occorrono 5000 lire, mentre egli ne possiede solo 1000. Tenta di procacciarsi le altre giocando ripetutamente a testa-croce con un amico: ad ogni partita egli gioca quanto possiede, in modo però da non superare, con l'eventuale vincita, il traguardo delle 5000 lire. Lo schema del gioco è rappresentato dal grafo qui disegnato. (I nodi del grafo sono contrassegnati dalla somma posseduta da Nico, espressa in Kilo-lire). Naturalmente, il gioco si arresta appena Nico abbia raggiunto le 5000 lire, oppure (come è certamente piú pro-

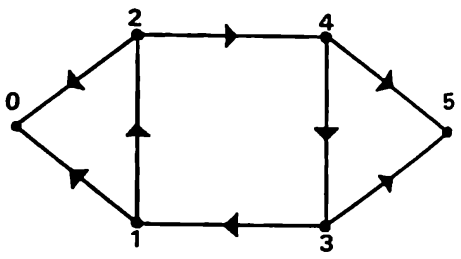


Fig. 16

babile) sia sbancato. Si chiede quale probabilità ha Nico di riuscire nel suo intento.

Indicheremo con p la probabilità richiesta. Vediamo da quali circostanze può scaturire l'evento favorevole:

— Nico vince 1 K£ e passa al nodo 2, poi gioca quanto possiede (cioè 2 K£) e, in caso di vittoria, giunge al nodo 4; qui gli basta giocare solo 1 K£; in caso favorevole ha raggiunto lo scopo; l'evento così descritto si compie con probabilità $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

— Dopo aver vinto due volte consecutive, Nico perde (passa dal vertice 4 al vertice 3): a questo punto gioca 2 K£ e vince; questo evento si compie con probabilità $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

— Giunto come nel caso precedente al vertice 3, Nico perde nuovamente e ricade sul vertice 1; a questo punto, la situazione è quella stessa che si aveva all'inizio, cioè Nico ha ancora probabilità p di vincere. Sempre per la « regola del prodotto », la probabilità che Nico ha di vincere dopo avere fatto così un « giro » $1 \to 2 \to 3 \to 1$ è data da $\left(\frac{1}{2}\right)^4 p = \frac{1}{16} p$.

Poiché i tre eventi che abbiamo elencato sono disgiunti fra loro, ed esauriscono tutti i possibili casi favorevoli, si ha l'uguaglianza

$$p = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} p$$

da cui $\left(1 - \frac{1}{16}\right) p = \frac{3}{16}$,

cioè $\frac{15}{16} p = \frac{3}{16}$ e, infine, $p = \frac{1}{5}$.

Questo risultato era facile da aspettarsi; infatti, il gioco, essendo equo nelle singole partite, deve risultare equo anche complessivamente...

La situazione descritta in questo problema è molto vicina a quella del problema n. 5 del paragrafo 17.6; qui però abbiamo usato per la prima volta un grafo in cui compaiono dei « cicli »; sarebbe stato indifferente impiegare un grafo senza cicli (considerando diversi gli stati raggiunti dopo un giro, due, tre, ...): si sarebbe trattato però di un grafo infinito, come appunto quello usato nel problema n. 5 del paragrafo 17.6.

c) Il problema seguente è particolarmente interessante e nuovo: riguarda la sopravvivenza di una certa specie biologica. Supponiamo che nella riproduzione di un certo microrganismo M possano verificarsi queste tre sole circostanze:

— M non si riproduce (evento di probabilità p_0);

— M riproduce un altro microrganismo (evento di probabilità p_1);

— M riproduce due altri microrganismi (evento di probabilità p_2).

Naturalmente, deve essere $p_0 + p_1 + p_2 = 1$. Ad ogni generazione, supponiamo che ogni microrganismo scompaia e rimangano solo i suoi eredi.

Vogliamo trovare quale è *la probabilità che la discendenza di un solo individuo si estingua, dopo un certo numero — non importa quanto grande — di generazioni.* L'evento che vogliamo descrivere è piuttosto complesso, proprio perché può verificarsi in tante modalità diverse; ammettiamo comunque che gli si possa attribuire una probabilità x. Notiamo che se — come supponiamo in ogni caso — si ha $p_0 > 0$, allora è certamente $x > 0$, essendo $x > p_0$, poiché p_0 rappresenta la probabilità di estinzione alla prima generazione.

È facile trovare un'equazione a cui deve soddisfare x. Supponiamo dunque, come si è detto, che inizialmente (diremo: nella generazione 0) vi sia un solo microrganismo M. Passando alla generazione n. 1, possono verificarsi questi tre soli eventi:

— M non ha discendenti: questo evento ha probabilità p_0;

— M ha un solo discendente, con probabilità p_1; in questo caso, in base alla regola del prodotto, si può avere l'estinzione con probabilità $p_1 x$;

— M ha due discendenti (evento di probabilità p_2); poiché, nelle nostre ipotesi, le vicende delle discendenze di due diversi microrganismi devono essere viste come due esperimenti indipendenti, la probabilità di estinzione di entrambe è x^2. Dunque, la probabilità che il microrganismo M ne generi due altri, e che entrambe le discendenze di estinguano, è data da $p_2 x^2$.

Sommando queste probabilità, che esauriscono evidentemente tutti i casi possibili, si ha la relazione

$$x = p_2 x^2 + p_1 x + p_0$$

che si può vedere come un'equazione di secondo grado in x, nella consueta forma

$$p_2 x^2 - (1 - p_1)\, x + p_0 = 0$$

Non c'è neppure bisogno di ricorrere alla formula risolutiva, se si nota che è $1 - p_1 = p_2 + p_0$.

Infatti, sostituendo, si ha

$$p_2 x^2 - (p_2 + p_0)\, x + p_0 = p_2 x\,(x-1) - p_0 (x-1) =$$
$$= (p_2 x - p_0)\,(x-1)$$

Le soluzioni sono perciò due:

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = \frac{p_0}{p_2}$$

Osserviamo allora che, se è $p_0 > p_2$, l'unica soluzione possibile è 1 perché una probabilità non può essere un numero maggiore di 1 . In questo caso si ha dunque estinzione con probabilità 1 . (Attenzione!: probabilità 1 non vuol sempre dire certezza, in casi in cui vi sono infiniti eventi elementari. Nel nostro caso, è possibile, ad esempio, che in ogni generazione si abbia un solo microrganismo, senza estinzione, anche se la probabilità di estinzione è 1).

Nel caso in cui sia $p_0 < p_2$ si può dimostrare (ma non abbiamo piú il tempo di farlo) che l'unica soluzione accettabile è $x = \frac{p_0}{p_2}$.

Notiamo che il numero medio dei microrganismi generati da un microrganismo è

$$p_1 + 2p_2 = 1 - (p_0 + p_2) + 2p_2 = 1 + (p_2 - p_0)$$

Dunque, come è naturale, quando questo numero è > 1 , la probabilità che la discendenza di un solo microrganismo non si estingua è positiva. Si ha però, comunque, una probabilità positiva di estinzione; la fase critica è rappresentata dalle prime generazioni: se il numero degli individui è già cospicuo, la probabilità di estinzione (sempre nel caso in cui sia $p_0 < p_2$) risulta molto bassa.

Il contenuto di questo ultimo paragrafo aveva lo scopo di mantenere vivo l'interesse verso il calcolo delle probabilità e i suoi possibili sviluppi: nello stesso spirito presentiamo qui alcuni esercizi sulla probabilità, di vari tipi.

Esercizi

1 Una stanza è pavimentata con mattonelle quadrate di lato l. Lanciando una moneta di raggio r quale è la probabilità che essa cada su un lato (almeno) di una mattonella? e la probabilità che essa cada su due lati di una stessa mattonella?

2 In un sacchetto vi sono m palline rosse ed n azzurre. Se ne estraggono 2 assieme. Quale è il numero medio delle palline rosse che si estraggono? (Il numero medio deve essere, come il buon senso vuole, $2\dfrac{m}{m+n}$; si tratta, in sostanza, di un esercizio di calcolo . . .).

** **3** Riprendere l'esercizio b) di questo paragrafo. Mediante la risoluzione di un'opportuna equazione, calcolare il numero medio delle partite giocate da Nico.

** **4** Un autobus percorre un rettilineo, fra gli estremi A e B, in cui ha due successive fermate. Un passeggero arriva da una via laterale al punto intermedio C, distante a da A e b da B; nel momento in cui arriva in C egli non vede l'autobus in nessun punto del rettilineo; egli può dirigersi verso A o verso B. Calcolare la probabilità che ha, in ciascuno dei casi, di prendere il primo autobus che arriva, disponendo di queste ulteriori informazioni:

— l'autobus ha una periodicità T e si muove con la velocità v.

— il passeggero cammina a piedi alla velocità u.

(Naturalmente, si spera che il passeggero abbia fatto i calcoli prima, altrimenti perderà certamente l'autobus!).

** **5** L'ufficio «pro loco» di una certa località turistica, ad una richiesta di informazioni sul clima, risponde in questo modo. «Se un giorno il tempo è bello, il giorno dopo 9 volte su 10 è bello; se un giorno il tempo è brutto, il giorno dopo 3 volte su 10 il tempo è bello». È possibile farsi un'idea del clima della località?

* **6** Riprendere il problema c) di questo paragrafo. Calcolare la probabilità x_n che la discendenza del microrganismo si estingua entro l'n-sima generazione: si dovrà ottenere una relazione che permette di calcolare x_{n+1} conoscendo x_n. (Poniamo $x_0 = 0$, dal momento che inizialmente c'è un microrganismo).

* **7** Disponendo di una piccola calcolatrice programmabile, dopo aver dato particolari valori numerici a p_0, p_1, p_2 (in modo tale da contemplare i tre casi: $p_0 > p_2$, $p_0 = p_2$, $p_0 < p_2$) programmare il calcolo di x_n ed eseguirlo un conveniente numero di volte, in modo da farsi un'idea dell'andamento della successione x_n.